

Modelos de Credit Scoring

- Qué, Cómo, Cuándo y Para Qué -

Matías Alfredo Gutiérrez Girault¹

Octubre de 2007

Resumen

Introducidas en los 70's, el uso de técnicas de *credit scoring* se generalizó en los 90's gracias al desarrollo de mejores recursos estadísticos y computacionales. Hoy en día prácticamente todas las entidades financieras emplean estas metodologías al menos para originar sus financiaciones. Dada su relevancia en el proceso de gestión crediticia, el objetivo de este trabajo es clarificar algunos aspectos asociados a los modelos de *credit scoring*: qué son, qué técnicas se pueden usar para construirlos y cuáles son más convenientes, qué variables emplean, qué aplicaciones se han desarrollado a partir de ellos y, sobre todo, cómo funcionan y deben interpretarse sus resultados. Con el sólo propósito de servir como ejemplo, con datos de la Central de Deudores del Sistema Financiero se construyó un modelo de *credit scoring* que facilita entender el funcionamiento de estas herramientas.

¹ Analista Principal, Gerencia de Investigación y Planificación Normativa, Subgerencia General de Normas, Banco Central de la República Argentina (BCRA). Agradezco los comentarios recibidos de Fernando Castelpoggi y Verónica Balzarotti, los comentarios y revisión de Cristina Pailhé y el apoyo brindado por José Rutman para su realización. Las opiniones vertidas en este trabajo son de mi autoría y no expresan una posición oficial del BCRA. Cualquier error remanente es de mi absoluta responsabilidad. Email: mggirault@bcra.gov.ar.

I. Introducción

La utilización de modelos de *credit scoring* para la evaluación del riesgo de crédito, es decir, para estimar probabilidades de *default* y ordenar a los deudores y solicitantes de financiamiento en función de su riesgo de incumplimiento, comenzó en los 70's pero se generalizó a partir de los 90's. Esto se ha debido tanto al desarrollo de mejores recursos estadísticos y computacionales, como por la creciente necesidad por parte de la industria bancaria de hacer más eficaz y eficiente la originación de financiaciones, y de tener una mejor evaluación del riesgo de su portafolio. Estos modelos generalmente se asocian a lo que se ha dado en llamar *data mining* (minería de datos), que son todos aquellos procedimientos que permiten extraer información útil y encontrar patrones de comportamiento de los datos. Por este motivo, la minería de datos no es una disciplina en sí, sino un conjunto de técnicas con origen diverso, pero en general con raíz estadístico matemática.

A pesar de la proliferación de los modelos de *credit scoring*, el juicio humano (o juicio del analista) continúa siendo utilizado en la originación de créditos, en algunos casos expresado como un conjunto de reglas que la entidad aplica de manera sistemática para filtrar solicitudes o deudores. De hecho, en la práctica ambas metodologías muchas veces coexisten y se complementan, definiendo sistemas híbridos. En el caso de la Argentina, un estudio realizado por el Banco Central de la República Argentina (BCRA)², mostró la amplia difusión que tienen estas técnicas para evaluar al portafolio minorista en la originación y, en menor medida, en el seguimiento de los créditos. Los resultados también mostraron que estas técnicas no han desplazado al juicio humano en la originación de los créditos: en general un *score* o puntaje adverso determina la denegación de una solicitud de financiamiento, mientras que un *score* por encima del mínimo admitido por la entidad financiera dispara análisis posteriores con los que la evaluación continúa. A su vez, la regulación del BCRA admite que, sujeto a ciertos límites y condiciones, las entidades que en la originación de sus créditos a personas físicas empleen modelos de *credit scoring* apropiados puedan solicitarles menos requisitos³.

El objetivo de este documento es clarificar diversos aspectos de los modelos de *credit scoring*: qué son, qué tipos de modelos hay y qué variables emplean, cómo se construyen y cuándo y para qué se usan. Un aspecto de vital importancia, pero que por su extensión merece

² Ver BCRA (2006).

³ Ver comunicaciones “A” 4325, 4559 y 4572.

un tratamiento aparte y no se discute aquí, es el de su validación⁴. La validación es, en pocas palabras, un proceso por el cual la entidad financiera, de manera periódica, revisa y evalúa diversos aspectos del modelo, como por ejemplo: su diseño, variables empleadas, la calidad de los datos y otros aspectos cualitativos, su eficacia para ordenar en función del riesgo (poder discriminatorio), la precisión en sus estimaciones de tasa de mora (calibración), etc.

Para clarificar aspectos del desarrollo y utilización de los modelos de *credit scoring*, con información de la *Central de Deudores del Sistema Financiero* (CENDEU) construimos un ejemplo y mostramos su funcionamiento. Este modelo debe tomarse solamente como un ejemplo muy sencillo orientado a ilustrar algunas características básicas de los modelos de *credit scoring*, que de ninguna manera busca establecer o señalar cuáles son las mejores prácticas ni lineamientos para su construcción.

La CENDEU es una base de datos administrada por el BCRA que contiene información de todas las deudas y deudores del sistema financiero, y que a través de la página web del BCRA da cierta información al público acerca de sus financiaciones y calificación crediticia. En la práctica, los registros públicos de deudas, como la CENDEU, son administrados por superintendencias y bancos centrales y no proveen servicios de *scoring* sino que se limitan a dar una información muy básica, ya que en general están más enfocados en facilitar la supervisión y regulación del sistema financiero. Por otro lado, las empresas de información crediticia, conocidas como burós de crédito, además de tener información detallada de los deudores del sistema financiero, reciben información de otras fuentes, como por ejemplo los juzgados comerciales y las tiendas minoristas. Con este *set* de información brindan, además de informes comerciales, servicios de *credit scoring*, de detección de fraudes y robo de identidad, etc. De todos modos, la naturaleza de los datos empleados en el ejemplo lo asemeja a un *score* de buró, ya que también se estima sobre un *pool* o repositorio común de información crediticia.

A continuación, en la sección II se introduce y define el concepto de *credit scoring*, mientras que en la sección III se comentan las técnicas frecuentemente empleadas para construirlos. La sección IV explica cuáles son las variables que comúnmente emplean, mientras que luego en la sección V se discuten diversas aplicaciones de estas metodologías, es decir, se explica cuándo se usan. En la sección V se construye un modelo de *credit scoring* a partir de una metodología muy difundida, la familia de modelos econométricos probit-logit. Allí se describe la muestra y metodologías empleadas, y se analizan los resultados. La sección VI

⁴ Para una descripción de diversas técnicas para validar estos modelos, ver Basel Committee on Banking Supervision (2005).

contiene las conclusiones. El documento presenta dos apéndices. En el primero se derivan las condiciones de primer y segundo orden de los modelos probit. En el segundo se introduce una metodología frecuentemente utilizada para pronosticar calificaciones, típicas de empresas corporativas evaluadas con sistemas de *rating*: el probit ordenado.

II. ¿Qué es un modelo de *credit scoring*?

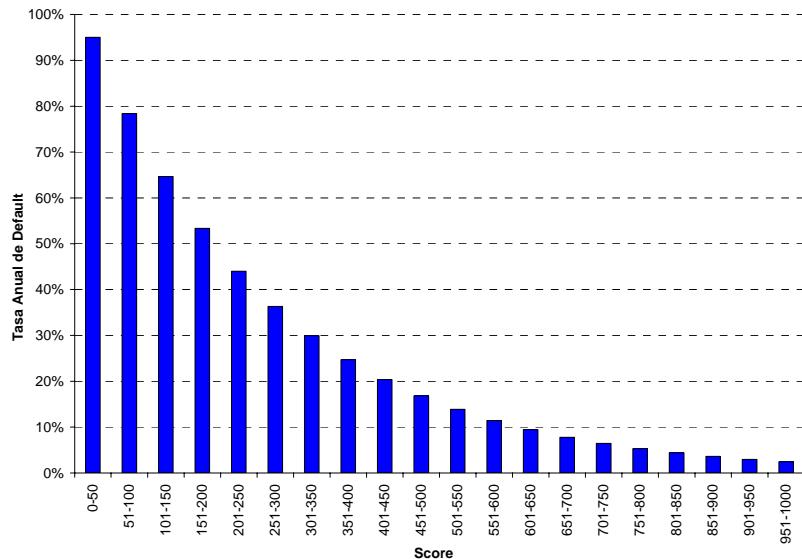
Los métodos o modelos de *credit scoring*, a veces denominados *score-cards* o *classifiers*, son algoritmos que de manera automática evalúan el riesgo de crédito de un solicitante de financiamiento o de alguien que ya es cliente de la entidad. Tienen una dimensión individual, ya que se enfocan en el riesgo de incumplimiento del individuo o empresa, independientemente de lo que ocurra con el resto de la cartera de préstamos. Este es uno de los aspectos en los que se diferencian de otras herramientas de medición del riesgo de crédito, como son los modelos de cartera y los VaR marginales, que tienen en cuenta la correlación de la calidad crediticia de los deudores de una cartera de préstamos.

En una primera aproximación a los mismos, se los puede definir como “métodos estadísticos utilizados para clasificar a los solicitantes de crédito, o incluso a quienes ya son clientes de la entidad evaluadora, entre las clases de riesgo ‘bueno’ y ‘malo’” (Hand y Henley (1997)). Aunque originalmente en los 70’s se basaban en técnicas estadísticas (en particular, el análisis discriminante), en la actualidad también están basados en técnicas matemáticas, econométricas y de inteligencia artificial. En cualquier caso, los modelos de *credit scoring* emplean principalmente la información del evaluado contenida en las solicitudes de crédito y/o en fuentes internas y/o externas de información.

El resultado de la evaluación se refleja en la asignación de alguna medida que permita comparar y ordenar a los evaluados en función de su riesgo, a la vez que cuantificarlo. Por lo general, los modelos de *credit scoring* le asignan al evaluado un puntaje o *score*, o una calificación, clasificación o *rating*. Algunos métodos los asignan a grupos, en donde cada grupo tiene un perfil de riesgo distinto; sin embargo, en la práctica esto equivale a una calificación. A su vez, estos ordenamientos de los deudores permiten obtener estimaciones más concretas del riesgo; en general se busca obtener alguna estimación de la probabilidad de incumplimiento del deudor (PD, por probabilidad de *default*) asociada a su *score*, *rating* o calificación. Esta estimación se puede obtener directamente del *score* en el caso de los modelos econométricos, o también en función de la tasa de incumplimiento (TD, por tasa de *default*) histórica observada en el grupo de deudores con la misma calificación o *score* similar.

El **Gráfico I** muestra un ejemplo artificial de una salida de un modelo de *credit scoring*, que muestra la TD histórica⁵ asociada a cada rango del *score*. La relación entre ambos se muestra para intervalos del puntaje, ya que es una variable continua, y se observa que el riesgo cae de manera exponencial a medida que mejora el *score*. Esta es una regularidad de las técnicas de *credit scoring* y sistemas de *rating*: a medida que mejora el *score* o calificación, la caída marginal en el riesgo es cada vez menor.

Gráfico I. Score y cuantificación del riesgo



Si bien en el ejemplo del **Gráfico I** la escala del *score* oscila entre 0 y 1.000, la misma es arbitraria y depende en última instancia de la construcción del modelo. También podría concebirse un modelo en el cual el riesgo baja a medida que baja el *score* (al revés que en el **Gráfico I**), pero en la práctica predominan aquellos que presentan una relación inversa entre el *score* y el riesgo.

III. Técnicas empleadas

Para evaluar el riesgo crediticio o la conveniencia de otorgar un crédito, hay una gran variedad de metodologías disponibles (para una comparación de enfoques alternativos ver Srinivasan y Kim (1987), Mester (1997), Hand y Henley (1997) y Thomas (2000)): análisis discriminante, regresión lineal, regresión logística, modelos probit, modelos logit, métodos no paramétricos de suavizado, métodos de programación matemática, modelos basados en cadenas de Markov, algoritmos de particionamiento recursivo⁶ (árboles de decisión), sistemas

⁵ También podría ser la PD.

⁶ Los métodos como el análisis discriminante, la regresión lineal y logística y los modelos probit pueden ser considerados como métodos de particionamiento simultáneo, ya que consideran a todas las variables explicativas

expertos, algoritmos genéticos, redes neuronales y, finalmente, el juicio humano, es decir, la decisión de un analista acerca de otorgar un crédito. Aunque esta última presenta la ventaja de ser más eficaz en tratar las excepciones a la experiencia pasada, los métodos de *credit scoring* son más eficientes a la vez que sus predicciones más objetivas y consistentes, por lo que pueden analizar y tomar decisiones sobre una gran cantidad de solicitudes de crédito en poco tiempo y a un bajo costo. La literatura sugiere que todos los métodos de *credit scoring* arrojan resultados similares, por lo que la conveniencia de usar uno u otro depende de las características particulares del caso.

Dentro de los enfoques econométricos, los modelos de probabilidad lineal han caído en desuso por sus desventajas técnicas (ver sección V), en tanto que los modelos probit, logit y la regresión logística son superiores al análisis discriminante ya que proveen para cada deudor una probabilidad de *default*, en tanto que este sólo clasifica a los deudores en grupos de riesgo. A pesar de que los probit, logit y la regresión logística son, en teoría, herramientas econométricas más apropiadas que la regresión lineal, ésta arroja estimaciones similares a las de los anteriores cuando sus probabilidades estimadas se ubican entre el 20% y el 80%.

Los modelos no paramétricos y los de inteligencia artificial, como por ejemplo los árboles de clasificación o decisión, las redes neuronales y los algoritmos genéticos, son superiores a los modelos estadísticos cuando se desconoce la probable forma de la relación funcional y se presume que no es lineal. En el caso de los árboles, tres algoritmos frecuentemente empleados para construir (entrenar) árboles son ID3, C4.5 y C5: en todos los casos buscan cuál es la partición óptima de la muestra tal que, dada la variable objetivo (el incumplimiento), los distintos grupos o particiones presentan distintos perfiles de riesgo. Los árboles tienen la ventaja de que no requieren la formulación de supuestos estadísticos sobre distribuciones estadísticas o formas funcionales. A su vez, presentan la relación entre las variables, los grupos y el riesgo de manera visual, con lo cual si el conjunto de variables en el análisis es reducido, facilita entender cómo funciona el *scoring*. Las redes neuronales y los algoritmos genéticos, a pesar de las ventajas mencionadas al principio del párrafo, son poco intuitivos y de difícil implementación.

Los modelos que utilizan programación matemática permiten diseñar *score-cards*⁷ mejor adaptadas a las necesidades de la entidad crediticia y manejar una gran cantidad de variables, y se basan en optimizar un criterio objetivo, como por ejemplo porcentaje de solicitantes bien

de manera simultanea al “asignar a los individuos a distintos grupos”, mientras que los algoritmos recursivos de partición lo hacen de manera secuencial.

⁷ Planillas o programas para asignar un puntaje o *rating*.

clasificados. Finalmente, los sistemas expertos tienen como atractivo la capacidad para justificar sus recomendaciones y decisiones, lo cual puede ser importante por cuestiones legales vinculadas al acceso al crédito.

Srinivasan y Kim (1987) comparan diversas técnicas y encuentran que los árboles de decisión superan a las regresiones logísticas, mientras que estas arrojan mejores resultados que el análisis discriminante. De hecho, sugieren que la superioridad de los árboles está en relación directa a la complejidad de los datos bajo estudio.

El objetivo de un banco es maximizar los beneficios derivados de la intermediación crediticia, lo cual no necesariamente tiene que estar relacionado directamente con el riesgo. Es decir, que un solicitante de crédito presente cierto riesgo no necesariamente implica que no conviene otorgarle financiamiento. Probablemente un cliente de una entidad que se financia con tarjeta de crédito y que es relativamente riesgoso, es más rentable que uno que no es para nada riesgoso pero que nunca se financia con la tarjeta. Por lo tanto, a la hora de determinar qué solicitudes aceptar y cuáles rechazar, la entidad tiene en cuenta los beneficios esperados de los solicitantes de distinto tipo de riesgo. Por ejemplo, Srinivasan y Kim (1987) analizan el problema de una empresa comercial que debe determinar el límite crediticio óptimo para cada cliente. Para estimarlo, resuelven un problema dinámico que integra la evaluación de riesgo del cliente con los beneficios potenciales que de él se derivarían y muestran los resultados para distintos métodos de *credit scoring*. Éstos proveerán distintas estimaciones de riesgo que, insertadas en el programa dinámico, permitirán obtener estimaciones del límite crediticio óptimo para cada cliente.

Entre todas las metodologías disponibles, los modelos probit, junto con las regresiones lineal y logística, el análisis discriminante y los árboles de decisión, se encuentran entre los métodos más usados en la industria para confeccionar estos modelos. Boyes, Hoffman y Low (1987) y Greene (1992) utilizan un probit bivariado para evaluar solicitudes de tarjeta de crédito, teniendo en cuenta no sólo la probabilidad de *default* del deudor, sino también el beneficio esperado para el banco derivado de la utilización de la tarjeta por parte del solicitante. Gordy (2000), al comparar modelos de cartera de riesgo crediticio, utiliza modelos probit para estimar la probabilidad de *default* de cada exposición en la cartera. Cheung (1996) y Nickell, Perraudin y Varotto (1998) utilizan modelos probit ordenados, de los cuales los probit bivariados son un caso particular, para estimar la futura probable calificación de títulos públicos, en tanto que Falkenstein (2000) realiza una aplicación similar pero para deuda privada.

Aunque los métodos señalados en el párrafo anterior son los más utilizados, frecuentemente se emplean de manera combinada. En primer lugar, como se mencionó en la introducción, en general en el sistema financiero argentino estos modelos no se usan de manera mandatoria para aceptar una solicitud, sino que sus resultados se combinan con revisiones posteriores. En otros casos, previo al cálculo del *score* se aplican filtros que acotan el universo de solicitantes a ser evaluados con estos modelos. En ocasiones se combinan diversas metodologías, como por ejemplo en los árboles de regresión: a través de un árbol se segmenta la muestra de deudores y luego a los deudores de cada segmento se les estima una regresión logística o modelo probit con distintas características.

IV. Variables empleadas

En las diversas aplicaciones de modelos de *credit scoring*, el tipo de variables utilizadas varía significativamente según se trate de modelos para la cartera *retail* (individuos y PyMEs), donde generalmente se usan variables socioeconómicas o datos básicos del emprendimiento productivo, o de grandes empresas (*corporates*). En este caso, se utilizan variables extraídas de los estados contables, información cualitativa acerca de la dirección, el sector económico, proyecciones del flujo de fondos, etc.

Para hacer *credit scoring* de *corporates*, RiskCalcTM de Moody's (ver Falkenstein (2000)) utiliza: activos/IPC, inventarios/costo de mercaderías vendidas, pasivos/activos, crecimiento de los ingresos netos, ingresos netos/activos, prueba ácida, ganancias retenidas/activos, crecimiento en las ventas, efectivo/activos y ratio de cobertura del servicio de la deuda. También señalan que (i) las variables con mayor poder predictivo son ganancias, apalancamiento, tamaño de la empresa y liquidez; y (ii) si bien la teoría recomienda utilizar ratios de apalancamiento y rentabilidad en un modelo de *scoring*, la experiencia sugiere usar ratios de liquidez. Srinivasan y Kim (1987), al comparar la *performance* de distintos modelos para deudas *corporate* usan: activo corriente/pasivo corriente, prueba ácida, patrimonio neto/deuda, logaritmo de los activos, ingresos netos/ventas, ingresos netos/activos. Finalmente, el *Z-score* (Altman, 1968) utiliza: capital de trabajo/activos, ganancias retenidas/activos, EBIT/activos, valor de mercado del patrimonio neto/valor libros de la deuda y ventas/activos.

Dentro de los modelos para deudas *retail*, Boyes, Hoffman y Low (1989) y Greene (1992) utilizan variables socioeconómicas: edad, estado civil, cantidad de personas a cargo, tiempo de permanencia en el domicilio actual y en el empleo actual, nivel educativo, si es propietario de la vivienda que habita, gastos mensuales promedio/ingresos mensuales promedio, tipo de

ocupación, si tiene tarjeta de crédito, cuenta corriente o caja de ahorro, número de consultas en los *credit bureaus* y cómo está calificado en ellos. Dentro de los modelos utilizados en la industria, *Fair Isaac Corporation* desarrolló uno que es empleado por los tres mayores burós de crédito de Estados Unidos de Norteamérica para calcular sus *scores* (de buró). Se trata del *FICO credit risk score*, que es empleado por los burós Equifax, Experian y Transunion para calcular sus *scores*: Beacon, Experian/Fair Isaac Risk Model y FICO Risk Score/Classic respectivamente. Estos *scores* tienen una amplia difusión para evaluar solicitudes de crédito y fluctúan entre un mínimo de 300 puntos y un máximo de 850. Aunque los tres emplean el mismo modelo, una misma persona puede tener distintos puntajes si su información difiere en dichos burós de crédito.

El *FICO credit risk score* utiliza principalmente variables asociadas al comportamiento de pagos actual y pasado, y refleja la idea de que el comportamiento pasado es el mejor predictor del comportamiento futuro. Los grupos de variables empleadas, junto con su incidencia en el *score*, son: historia de pagos (35%), monto adeudado (30%), largo de historia crediticia (15%), nuevo crédito (10%) y tipo de crédito usado (10%). A diferencia de las aplicaciones más académicas, y por motivos legales⁸, no utiliza variables como raza, religión, nacionalidad, sexo y estado civil. Tampoco emplea la edad, los ingresos, la ocupación y antigüedad en el empleo, el domicilio, la tasa de interés y el número de consultas realizadas al buró por el deudor, por entidades financieras para ofrecer productos pre-aprobados o para monitorear a sus deudores, o por empleadores. La cantidad de consultas realizadas en respuesta a solicitudes de crédito sí influye en el *score*.

La información que se emplea para hacer *scoring* del portafolio *retail* usualmente se clasifica en positiva y negativa. La información negativa es aquella asociada a los incumplimientos y atrasos en los pagos, mientras que la positiva es la información de los pagos a término y otra información descriptiva de las deudas, como montos de préstamos, tasas de interés y plazo de las financiaciones. La evidencia empírica muestra que la inclusión de la información asociada al buen comportamiento de pagos mejora sustancialmente la performance de estos modelos. Por ejemplo, con datos de Argentina, Brasil y Mexico, Powell *et al* (2004) cuantifica la mejora en el poder predictivo de estos modelos al incluir la información positiva respecto a modelos que sólo usan información negativa, y muestra que su utilización por parte de los dadores de crédito facilita el acceso al crédito y mejora la calidad de los portafolios de préstamos de las entidades financieras.

⁸ La Consumer Credit Protection Act prohíbe que el *credit scoring* utilice esta información.

Por último, los modelos de *credit scoring* para microemprendimientos y PyMEs tienden a combinar información personal del titular del emprendimiento y del negocio. Uno de los primeros desarrollos fue el *Small Business Scoring Solution* que Fair Isaac Corporation introdujo en 1995, que fue pionero en combinar información de los principales dueños de la empresa y del negocio mismo. Dentro de los desarrollos académicos más recientes, Miller y Rojas (2005) hacen *credit scoring* de PyMEs de Mexico y Colombia, mientras que Milena, Miller y Simbaqueba (2005) hacen lo mismo para microfinancieras de Nicaragua.

IV. Aplicaciones

Tanto en el ámbito teórico como en la práctica de la industria bancaria, los modelos de *credit scoring* se pueden emplear para evaluar la calidad crediticia de clientes de todo tamaño: *retail* (individuos y PyMEs) y *corporate*. Sin embargo, en la práctica predominan para evaluar el portafolio *retail*, mientras que los deudores *corporate* se evalúan con sistemas de *rating*. Además de las diferencias en las variables empleadas para uno y otro tipo de cliente (ver sección III), la evaluación de grandes empresas implica la revisión de aspectos cualitativos de difícil estandarización, por lo cual el resultado se expresa como una calificación y no como un *score*. De todos modos, Ridpath y Azarchs (2001) estiman modelos de *credit scoring* para empresas grandes que cotizan en bolsa, mientras que Jennings (2001) discute las ventajas de su aplicación en PyMEs. En el resto del documento se analizan modelos diseñados para la banca minorista exclusivamente.

Las entidades pueden emplear estos modelos en la originación, es decir, para resolver solicitudes de crédito. En este caso se trata de modelos reactivos o de *application scoring*. También se emplean para administrar el portafolio de créditos, en cuyo caso se trata de modelos de seguimiento, proactivos o de *behavioural scoring*, y se pueden emplear para: administrar límites de tarjetas y cuentas corrientes, analizar la rentabilidad de los clientes, ofrecer nuevos productos, monitorear el riesgo y detectar posibles problemas de cobranza, entre otras aplicaciones.

En el caso de los modelos de *application scoring*, las entidades financieras generalmente determinan un *cut off* o punto de corte para determinar qué solicitudes se aceptan (por tener un puntaje mayor o igual al *cut off*) y cuales no. Como se mencionó en la sección II, la fijación del mismo no responde a consideraciones de riesgo exclusivamente sino que depende de la tasa de beneficios deseada por la entidad y su apetito por el riesgo. A su vez, para la misma rentabilidad deseada, una entidad con una mejor gestión de recuperos o un mejor sistema de administración de límites o de alertas tempranas, podría trabajar con menor *cut off*.

ya que compensa el mayor riesgo con una menor exposición al mismo o una mejor gestión de recuperos. La relación entre la política de crédito de un banco y su manejo del *scoring* se esquematiza en la **Figura I**.

Figura I. Fijación del *cut off* y política de crédito



En la práctica, sin embargo, la aplicación no es tan directa. Como se comentó en la introducción, los resultados de un relevamiento en el sistema financiero argentino (ver BCRA (2006)) indican que los *scores* se emplean, en general, de manera mandatoria pero en forma asimétrica: los solicitantes de crédito con un *score* inferior al *cut off* son rechazados, mientras que aquellos con valores superiores pasan a etapas posteriores de análisis previo al otorgamiento de la financiación.

Por otro lado, en la mayoría de los casos se trata de *scorings* genéricos, es decir, que evalúan la capacidad de repago de un solicitante de crédito sin tener en cuenta las características de la financiación solicitada. Sin embargo, existen desarrollos que apuntan a una mayor precisión en los resultados y están diseñados para solicitantes de un tipo de financiación en particular, como ser prendarios o hipotecarios para la vivienda. La dimensión del tipo de financiación solicitada es relevante, ya que distintos deudores con idéntica capacidad de repago e historial crediticio probablemente muestren distintos patrones de pago según el tipo y plazo de la financiación que soliciten.

Por último, los modelos pueden ser desarrollados con datos externos de la entidad, como es el caso de los *scores* de buró, o con datos internos de la entidad por ella misma o por consultores externos.

V. Ejemplo: un modelo de *credit scoring* para banca minorista

V.a. Descripción de los datos

El BCRA administra, a través de la Superintendencia de Entidades Financieras y Cambiarias (SEFyC), la *Central de Deudores del Sistema Financiero* (CENDEU), una base de datos que concentra, mes a mes, millones de datos sobre el grado de cumplimiento en los pagos y la calidad crediticia de todos los deudores del sistema financiero con deudas consolidadas superiores a los \$50 con alguna entidad crediticia⁹.

La CENDEU posee información detallada de todo deudor del sistema financiero: identificación, sector (privado no financiero, etc.), tipo de deudor (consumo o vivienda, comercial asimilable a consumo y comercial), actividad económica, clasificación de riesgo, entidad acreedora, deuda, tipo de financiación¹⁰ y cobertura con garantías preferidas, entre otras.

Según las normas del BCRA, todos los deudores del sistema financiero deben ser clasificados en una escala de 1 a 5¹¹ en función de su riesgo de crédito, para lo cual el principio básico es la capacidad de pago futura de sus obligaciones con la entidad. La capacidad de repago de los deudores minoristas se aproxima en función de los días de atraso y de su situación judicial, mientras que para los comerciales, en función de su flujo financiero proyectado y, de manera secundaria, teniendo en cuenta la posibilidad de liquidar activos. Las reglas también difieren en relación a la periodicidad del proceso: la clasificación se revisa mensualmente para los deudores de consumo o vivienda y asimilables y con una frecuencia variable según su importancia¹² (trimestral, semestral o anual) para los comerciales.

V. b. Metodología empleada: modelo probit

Cuando al plantear un modelo la variable dependiente o a explicar toma valores discretos, se emplean modelos de regresión discreta. El caso más simple se da cuando ella es binaria y

⁹ Por entidades crediticias la normativa se refiere, además de las entidades financieras bancarias y no bancarias, a otras como por ejemplo las entidades no financieras emisoras de tarjetas de crédito en la modalidad de “sistema cerrado”.

¹⁰ El concepto “financiación” incluye, además de los préstamos (créditos hipotecarios, prendarios y personales) a las responsabilidades eventuales: garantías otorgadas, avales otorgados sobre cheques de pago diferido, adelantos en cuenta corriente (saldos no utilizados) y documentos redescuentados en otras entidades financieras, entre otros. En el caso del descubierto en cuenta corriente, este monto acordado suma como potencial endeudamiento en la “deuda consolidada” y es calificado, independientemente de que sea usado o no por el cliente.

¹¹ Existe una sexta calificación, *situación 6, irrecuperables por disposición técnica*. Sin embargo, ella es asignada a los deudores que si bien presentan cierto riesgo no necesariamente son más riesgosos que los deudores en situación 5. A su vez, se trata de una categoría con un perfil de riesgo muy heterogéneo y que incluye a muy pocos deudores, por lo que no se incorporó en la estimación del modelo.

toma los valores 0 o 1, y se puede estimar con distintos enfoques como el modelo de probabilidad lineal, análisis discriminante, los modelos de tipo probit y logit o con una regresión logística.

Sea Y una variable aleatoria binaria que toma el valor 1 si ocurre el evento (el deudor cumple con los pagos normalmente) y 0 si entra en mora, se cuenta con una muestra aleatoria de n observaciones, $Y_i, i: 1, \dots, n$, y se define como Ω_i al conjunto de información relevante asociado con el individuo i , que se utilizará para explicar a Y_i .

Un modelo de elección binaria es un modelo de la probabilidad de ocurrencia del evento Y_i condicional en el conjunto de información Ω_i :

$$P_i = \Pr(Y_i = 1 | \Omega_i) \quad (1)$$

Dado que Y_i toma los valores 0 y 1, la esperanza de Y_i condicional en Ω_i es:

$$E(Y_i | \Omega_i) = 1P_i + 0(1 - P_i) = P_i = \Pr(Y_i = 1 | \Omega_i) \quad (2)$$

En consecuencia, cuando la variable a explicar es binaria, su esperanza condicional es la probabilidad condicional de ocurrencia del evento.

El modelo de probabilidad lineal

Supóngase que Ω_i está constituido por un vector columna X_i compuesto por k variables explicativas, incluyendo a la ordenada al origen, β es un vector columna que contiene los parámetros correspondientes a las variables explicativas, y que se intenta modelar a la variable Y_i a través del modelo de probabilidad lineal, postulando la siguiente relación:

$$Y_i = \beta^T X_i + \varepsilon_i, \quad \text{donde } E(\varepsilon_i | X_i) = 0 \text{ y } E(\varepsilon_i) = 0, \quad (3)$$

y usando (2),

$$E(Y_i | X_i) = P_i = \beta^T X_i \quad (4)$$

El modelo de probabilidad lineal, como se observa en la ecuación (3), implica estimar un modelo lineal en los parámetros para Y_i . Los valores predichos deberían **en su mayoría** ubicarse en el intervalo [0,1], pudiendo ser interpretados como la probabilidad de que la variable a explicar tome alguno de estos valores.

Mientras que su estimación e interpretación es simple, su utilización se ha visto desalentada por dos problemas en la metodología. En primer lugar, como la esperanza condicionada de Y_i es igual a la probabilidad condicionada de ocurrencia del evento (de $Y_i=1$), ella debería estar restringida al intervalo [0,1]. Sin embargo, el modelo lineal no impone ninguna restricción

¹² Medida por la relación entre sus financiaciones comprendidas (con la entidad) y su Responsabilidad Patrimonial Computable o Activo, según se trate de entidades o fideicomisos financieros.

sobre $\beta^T X_i$, asumiendo implícitamente que la variable dependiente puede tomar cualquier valor. Es por esto que el modelo puede estimar probabilidades negativas o mayores que uno, lo cual carece de significado económico. A su vez, el término de error de este modelo no es homocedástico, ya que la varianza condicional varía según las observaciones, por lo que las estimaciones de β no son eficientes.

Para resolver estos inconvenientes hay modelos econométricos, generalmente estimados por máxima verosimilitud, que tienen en cuenta la naturaleza discreta de la variable dependiente: se trata de los modelos de respuesta o elección binaria. Ellos utilizan ciertas funciones de distribución para la innovación, con el objetivo de limitar las probabilidades estimadas al intervalo [0,1]: las más usadas son la función de probabilidad acumulada normal estándar y la función logística. Cuando se usa la normal estándar se trata de un modelo probit, y logit cuando se usa la función logística¹³.

Los modelos probit y logit

El modelo probit es una de varias alternativas para estimar modelos de respuesta binaria. La idea consiste en utilizar una función de transformación $F(x)$ que tenga las siguientes propiedades:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1 \quad \text{y} \quad f(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} > 0 \quad (5)$$

$F(x)$ es una función monótona creciente que mapea de la línea real al intervalo [0,1]. Varias funciones de distribución acumulada tienen estas propiedades: la normal, la logística, la de Cauchy y la de Burr, entre otras. Estas distintas alternativas para los modelos de respuesta binaria consisten en una función de transformación $F(x)$ aplicada a una función índice que depende de las variables explicativas del modelo y que tiene las propiedades de una función de regresión, pudiendo ser lineal o no lineal.

La siguiente es una especificación general para cualquiera de los modelos de elección binaria: $E(Y_i|\Omega_i) = F(h(X_i))$, donde h es la función índice. (6)

Si bien h puede ser cualquier tipo de función, generalmente se utiliza una especificación lineal:

¹³ La función logística es la distribución acumulada de la distribución sech², la secante hiperbólica al cuadrado. La ventaja de utilizar esta distribución es que tiene una expresión sencilla. Salvo por esta diferencia, que con los recursos computacionales disponibles en la actualidad no es significativa, ambas distribuciones difieren muy poco y sólo en las colas, teniendo la función logística colas levemente más gordas. Al comparar los resultados obtenidos con ambas funciones, se debe tener en cuenta que la varianza de la normal estándar es 1, en tanto que la de la distribución sech² es $\pi^2/3$. Por este motivo, para obtener coeficientes comparables se debe multiplicar a los coeficientes del modelo logit por $\pi/(3^{1/2})$. Sin embargo, Amemiya (1981) sugiere que multiplicarlos por 0,625

$$E(Y_i|\Omega_i) = F(\beta^T X_i), \quad (7)$$

por lo cual el modelo de elección binaria es simplemente una transformación no lineal de una regresión lineal, y si bien $\beta^T X_i$ puede tomar cualquier valor sobre la línea real, $F(\beta^T X_i)$ está limitado al intervalo $[0,1]$. En el modelo probit, la función de transformación $F(x)$ es la función de distribución acumulada normal estándar, y por definición satisface las condiciones impuestas en (5). En este caso, el modelo de elección binaria puede escribirse de la siguiente manera:

$$P_i = E(Y_i|\Omega_i) = F(\beta^T X_i) = \Phi(\beta^T X_i) \equiv \int_{-\infty}^{\beta^T X_i} \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} ds \quad (8)$$

Cuando se trata de modelos logit, $F(x)$ es la función logística y el modelo de respuesta binaria se escribe como:

$$P_i = E(Y_i|\Omega_i) = F(\beta^T X_i) = \frac{e^{\beta^T X_i}}{1 + e^{\beta^T X_i}} \quad (9)$$

Los modelos probit y logit pueden ser derivados de otro modelo que introduce una variable no observada o latente y^* , de la siguiente manera. Sea,

$$y_i^* = \beta^T X_i + \varepsilon_i, \quad \text{con } \varepsilon_i \sim iid(0,1) \quad (10)$$

Si bien y^* no se observa, decimos que,

$$Y_i = 1 \text{ si } y_i^* > 0 \text{ y } Y_i = 0 \text{ si } y_i^* \leq 0 \quad (11)$$

Luego, la probabilidad que $Y_i=1$ viene dada por:

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= P(y_i^* > 0) = P(\beta^T X_i + \varepsilon_i > 0) = 1 - P(\beta^T X_i + \varepsilon_i \leq 0) = 1 - P(\varepsilon_i \leq -\beta^T X_i) \\ &= 1 - F(-\beta^T X_i) = F(\beta^T X_i) \end{aligned} \quad (12)$$

ya que se supone que ε_i tiene una distribución simétrica. Cuando $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ F es Φ , la función de distribución de probabilidades acumuladas normal estándar y se trata del modelo probit, mientras que si F es la función logística se trata de un logit y su densidad también es simétrica alrededor de cero.

Luego, y tomando como ejemplo el modelo probit,

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= F(\beta^T X_i) = \Phi(\beta^T X_i) \text{ y} \\ P(Y_i = 0) &= 1 - \Phi(\beta^T X_i) \end{aligned} \quad (13)$$

es mejor, ya que esta transformación acerca más la función logística a la función de distribución de la normal estándar.

Estimación de los modelos logit y probit

La estimación de estos modelos se hace por máxima verosimilitud. Con métodos numéricos se buscan los valores de β que maximizan la siguiente función logarítmica de verosimilitud:

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n (Y_i \log(F(\beta^T X_i)) + (1 - Y_i) \log(1 - F(\beta^T X_i))) \quad (14)$$

Las condiciones de primer orden para un máximo en (14) son:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{F}_i) \hat{f}_i X_{ij}}{\hat{F}_i (1 - \hat{F}_i)} = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (15)$$

donde,

$$\hat{F}_i \equiv F_i(\beta^T X_i) \text{ y } \hat{f}_i \equiv f_i(\beta^T X_i),$$

siendo β el vector de estimativos máximo verosímiles. Cuando (14) es globalmente cóncava, satisfacer las condiciones de primer orden asegura que el máximo es único. Los modelos probit, logit y otros tipos de modelos de respuesta binaria satisfacen las condiciones de regularidad necesarias para que las estimaciones de los parámetros sean consistentes y asintóticamente normales, con la matriz de covarianzas asintótica dada por la inversa de la matriz de información. En el Apéndice I se comentan las propiedades asintóticas de estos estimadores y se desarrollan las condiciones de primer y segundo orden del problema de maximización.

V.c. Interpretación del modelo

En el contexto de los modelos de *credit scoring* se puede asociar $\beta^T X_i$ a la calidad crediticia del individuo (variable latente o no observada). Cambiando su denominación por Z_i , esta variable representa la calidad crediticia del individuo, que se puede suponer el resultado de una función lineal en sus parámetros, como por ejemplo:

$$Z_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_5 X_{5i} \quad (16)$$

Las estimaciones de los parámetros β_j se obtienen por máxima verosimilitud como se explicó en los párrafos anteriores, y las variables X_j contienen la información de los deudores. Habiendo obtenido las estimaciones β_j , el modelo empírico con el que trabajará el analista de riesgo es,

$$z_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_5 X_{5i} \quad (17)$$

cuando se trata de un modelo que emplea cinco variables ($j=5$). La variable z_i es el *score* estimado del deudor, una medida de su calidad crediticia obtenida a partir de los parámetros estimados y de su propia información. Este *score*, aplicado a las funciones de distribución de

probabilidades acumuladas normal o logística, permite conocer la probabilidad de incumplimiento y en consecuencia el riesgo del deudor.

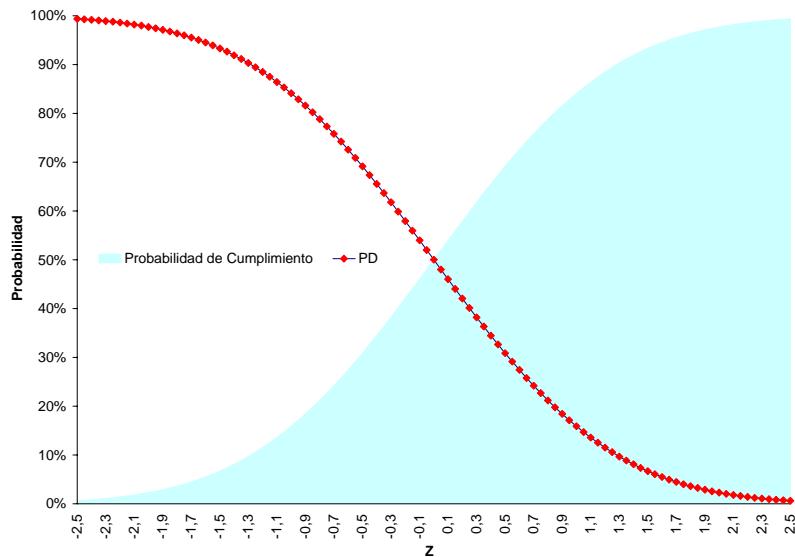
Relación entre el score y el riesgo

Habiendo definido al *score*, se puede reescribir (13) como,

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= F(Z_i) = \Phi(Z_i) \text{ y} \\ P(Y_i = 0) &= 1 - \Phi(Z_i) \end{aligned} \quad (18)$$

donde queda claro que cambios en Z_i implican cambios en la PD del individuo. Como se observa en el **Gráfico II**, la relación entre *score* y riesgo (la PD) no es lineal, por lo que el cambio en el riesgo derivado de un cambio en el *score* depende de los valores que este último tome. Para valores del *score* muy bajos, un aumento en el mismo produce una rápida subida en la probabilidad de cumplimiento y una rápida disminución de la PD, mientras que para valores del *score* altos, una mejora en el mismo hace que la probabilidad de cumplimiento aumente poco y genera una leve caída en el riesgo. Es decir, cuanto mayor es el *score*, menor es la caída en el riesgo derivada de un aumento en el primero.

Gráfico II. Relación entre el score y el riesgo



Efectos Marginales

Los β_j (o su estimación b_j) no tienen una interpretación directa como en mínimos cuadrados ordinarios, ya que sólo representan el efecto que un cambio en X_j tiene sobre el *score* del individuo, a la vez que su signo muestra si la relación con la PD es directa o inversa. Sin embargo, para **cuantificar** el efecto de X_j sobre la PD se debe computar su **efecto marginal**.

Dado que F es una función no lineal, cambios en los valores de cualquiera de las variables explicativas, si bien afectan linealmente a la función índice, tienen un efecto no lineal sobre la probabilidad estimada de ocurrencia del evento.

El **efecto marginal** de X_{ij} indica el cambio en la probabilidad de ocurrencia del evento (el cambio en la probabilidad de cumplimiento de las obligaciones) para el individuo i , ante un pequeño cambio en el valor de la variable X_j .

Como, $E(Y_i|\Omega_i) = P_i = F(Z_i)$, (19)

$$\frac{\partial P_i}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial F(Z_i)}{\partial X_{ij}} = \frac{dF(Z_i)}{dZ_i} \frac{\partial Z_i}{\partial X_{ij}} = f(Z_i) \frac{\partial Z_i}{\partial X_{ij}} = f(Z_i) \beta_{ij} \quad (20)$$

En este caso, el evento se definió como el cumplimiento normal de las obligaciones, por lo que (20) muestra cómo cambia la probabilidad de cumplir con el pago de la financiación en respuesta a un cambio pequeño en X_{ij} . Sin embargo, como $PD_i = 1 - P_i$,

$$\frac{\partial PD_i}{\partial X_{ij}} = -\frac{\partial F(Z_i)}{\partial X_{ij}} = -\frac{dF(Z_i)}{dZ_i} \frac{\partial Z_i}{\partial X_{ij}} = -f(Z_i) \frac{\partial Z_i}{\partial X_{ij}} = -f(Z_i) \beta_j \quad (21)$$

La expresión en (21) cuantifica cuánto cambia la PD del individuo i ante cambios pequeños en la variable continua X_j . De derecha a izquierda, la primer derivada (parcial) o β_j muestra el efecto de un cambio en X_j sobre el *score* del individuo i , mientras que la segunda muestra el efecto de un cambio en el *score* sobre la probabilidad de *default*, dado por el valor de la función de densidad evaluado en Z_i . Empleando la expresión de la función de densidad normal y reemplazando Z_i y β_j por sus estimaciones (z_i y b_j respectivamente), la estimación del efecto marginal viene dada por,

$$\frac{\partial \hat{PD}_i}{\partial X_{ij}} = -\frac{e^{-\frac{z_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} b_j \quad (22)$$

Como el cociente es positivo, un valor negativo de b_j hará que aumentos en X_j bajen el *score* y a su vez aumenten la *PD*.

VI. Ejemplo

En esta sección se estima un modelo de *credit scoring* con la técnica del probit. Con datos de la CENDEU, se construye un modelo que predice el comportamiento de los deudores *retail* del sistema financiero: individuos y PyMEs. Los primeros corresponden a los categorizados como deudores de consumo o vivienda, mientras que las PyMEs se asocian a los deudores comerciales asimilables a consumo. Por tratarse de un modelo para deudores del sistema financiero, se trata de un modelo de comportamiento, no de originación.

La muestra empleada en la estimación se construyó de la siguiente manera. Para cada uno de los años comprendidos en el período 2000-2006 se seleccionaron los deudores no comerciales del sector privado no financiero que a comienzos de cada año no se encontraban en *default*. Se definió *default* como estar en situación 3, 4 o 5 en la entidad, ya que para estos deudores implica en general un atraso superior a los 90 días, que es el período que comúnmente se emplea para identificar el *default*.

Habiendo definido la población objetivo, conformada por poco más de 32.600.000 deudores, se tomó una muestra aleatoria del 20% de la misma, con información sobre aproximadamente 6,5 millones de deudores. Aunque no es el objetivo de este trabajo discutir técnicas de validación de modelos, el 80% restante de los datos se puede emplear para hacer ejercicios *out-of-sample* que permitan evaluar la *performance* del modelo.

La variable a explicar es la situación de *default* o no *default* de los deudores (ninguno de los cuales estaba en *default* al comienzo de cada uno de los períodos analizados) al cierre de cada año, lo cual le otorga a la PD estimada una dimensión anual¹⁴. Las variables explicativas se tomaron todas, directa o indirectamente, de la CENDEU¹⁵, y son las siguientes:

- i. *calificación inicial*: la calificación asignada al deudor al comienzo de cada período, que puede ser 1 o 2 por los filtros impuestos en la muestra;
- ii. *historia crediticia*: aproximada por la calificación que tenía el deudor en la entidad 180 días antes de cada período;
- iii. *peor calificación sistema*: la peor calificación que, al comienzo de cada período, tiene el deudor en el sistema financiero (puede o no coincidir con la calificación en la entidad);
- iv. *tipo de entidad*: es una variable categórica que busca controlar por distintos criterios o políticas en la evaluación del riesgo, que puedan afectar el perfil de riesgo de las carteras de préstamos. La variable identifica si el banco es público, de capital extranjero, etc;
- v. *tipo de deudor*: busca controlar por tipo de deudor, consumo o vivienda o asimilable;
- vi. *clean*: es una variable *dummy* que toma un valor 0 si la deuda está cubierta con garantías preferidas A o B, y 1 de lo contrario. Por tratarse de deudores minoristas, es de esperar que refleje la existencia de garantías preferidas B, como es el caso de las financiaciones cubiertas con garantías prendarias o hipotecarias;

¹⁴ En otras palabras, la variable dependiente es la clasificación que obtendrá cada “deudor-banco” dentro de 12 meses, mapeada a una escala binaria. Si un mismo individuo tiene deudas con dos bancos distintos, para cada una de ellos se pronosticará su comportamiento futuro.

¹⁵ Las variables fueron seleccionadas con el propósito de que el modelo fuera simple y fácil de entender, y no para construir un modelo que fuera a ser usado en la práctica. Existen muchas otras variables que podrían haberse incluido para incrementar el poder discriminatorio del modelo.

- vii. *total de bancos*: es una variable categórica que indica con cuántas entidades el deudor tiene obligaciones (1 o 2, 3 o 4, 5 o 6, 7 u 8, más de 8);
- viii. *crecimiento PBI*: la tasa de crecimiento del PBI, durante cada período;
- ix. *deuda banco*: total de financiamiento tomado de la entidad, incluyendo responsabilidades eventuales;
- x. *deuda sistema*: ídem anterior, computada para el total del sistema financiero;
- xi. *cobertura*: el cociente entre garantías preferidas y la deuda con la entidad;
- xii. *significancia*: el cociente entre la deuda con la entidad y la deuda total en el sistema, busca capturar la importancia que el endeudamiento con la entidad tiene en relación a su endeudamiento con el total del sistema financiero.

Los resultados de las estimaciones se presentan en la página siguiente en la **Tabla I**, junto con el cómputo de los efectos marginales¹⁶. En general los coeficientes estimados (los b_j s) tienen los signos esperados. En el caso de las variables que reflejan el comportamiento corriente y pasado de pagos, los deudores que al comienzo de cada período están en situación 2 son sensiblemente más riesgosos que aquellos en situación 1. En promedio, dos deudores idénticos en todo salvo en su situación inicial, el que se encuentra en situación 2 tiene una PD un 22,7% mayor que el que está en situación 1. Un resultado similar se obtiene para la variable *peor calificación sistema*: cuanto más baja es la peor calificación en el sistema financiero, mayor la probabilidad de que el deudor haga *default* en la entidad financiera. En el caso del comportamiento de pagos histórico, la variable *historia crediticia* tiene el resultado esperado: los deudores que 6 meses antes estaban en situación irregular en la entidad, tienen más probabilidad de hacer *default* que los que no tuvieron ningún problema (estaban en situación 1). El resultado para los deudores “nuevos”, cuya calificación histórica es 0, refleja que su calidad crediticia es peor que la de los deudores con buen comportamiento histórico, y que son mejores que los que tuvieron algún problema.

El coeficiente de la variable *dummy* para los deudores de consumo o vivienda, normalizado a cero en la estimación, es mayor que el coeficiente de los deudores comerciales asimilables a consumo. Esto implica que las PyMEs tendrán, en promedio y en comparación a los individuos, una PD un 0,6% mayor. Por otro lado, la variable *total de bancos* muestra que para los deudores *retail* ser deudor de una mayor cantidad de entidades está asociado a un mayor riesgo. El último control, que refleja si la financiación está cubierta o no con garantías preferidas, como son los créditos hipotecarios para la vivienda y los prendarios automotor en

¹⁶ El concepto de efecto marginal corresponde a las variables continuas. En el caso de las variables categóricas, en general se compara cómo cambia la PD cuando la variable toma distintos atributos.

el caso de las familias, indica que las financiaciones con este tipo de cobertura presentan una menor probabilidad de incumplimiento. O sea, las financiaciones *clean* son más riesgosas: en promedio el riesgo aumenta un 2,3%.

Tabla I. Estimación del Modelo de Credit Scoring: Resultados

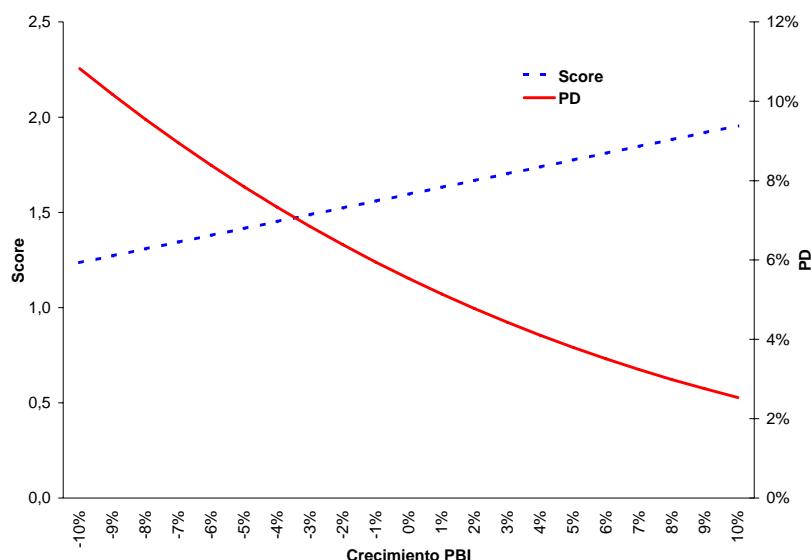
Variable	Coeficiente estimado (b_i)	Efecto marginal
ordenada al origen	-1,36 ***	
crecimiento PBI	3,59 ***	-36%
crecimiento PBI $_{-1}$	0,05 **	-0,5%
calificación inicial: 1	1,10 ***	-
calificación inicial: 2	0,00 ***	22,7%
peor calificación sistema: 1	0,82 ***	-
peor calificación sistema: 2	0,30 ***	7,0%
peor calificación sistema: 3	-0,07 ***	15,4%
peor calificación sistema: 4	-0,11 ***	16,7%
peor calificación sistema: 5	0,00 ***	13,6%
historia crediticia: 0	0,80 ***	2,5%
historia crediticia: 1	1,03 ***	-
historia crediticia: 2	0,68 ***	4,2%
historia crediticia: 3	0,29 ***	11,7%
historia crediticia: 4	0,09 ***	17,1%
historia crediticia: 5	0,00 ***	19,8%
tipo de entidad: Caja de Crédito	-0,26 ***	3,3%
tipo de entidad: Comp. Fin. Capital	-0,33 ***	4,4%
tipo de entidad: Comp. Fin. Capital Nacional	-0,17 ***	2,1%
tipo de entidad: Local de Capital Extranjero	-0,01 ***	0,2%
tipo de entidad: Privado de Capital Nacional	0,10 ***	-0,9%
tipo de entidad: Público Municipal	0,13 ***	-1,3%
tipo de entidad: Público Nacional	0,05 ***	-0,5%
tipo de entidad: Público Provincial	0,10 ***	-1,0%
tipo de entidad: Sucursal Capital Extranjero	0,00 ***	-
tipo de deudor: Consumo o Vivienda	0,00 ***	-
tipo de deudor: Asimilable	-0,06 ***	0,6%
total de bancos: 1- 2	0,50 ***	-
total de bancos: 3- 4	0,40 ***	1%
total de bancos: 5- 6	0,21 ***	4%
total de bancos: 7- 8	0,00 ***	7%
total de bancos: + de 8	-0,31 ***	14%
clean	0,00 ***	2,3%
no clean	0,28 ***	-
deuda banco	-0,00 ***	0,0%
deuda banco ²	0,00 ***	
deuda banco ³	0,00 ***	
deuda sistema	0,00 ***	0,0%
deuda sistema ²	0,00 ***	
deuda sistema ³	0,00 ***	
cobertura	-1,82 ***	14,8%
cobertura ²	2,38 ***	
cobertura ³	-0,49 ***	
significancia	-2,20 ***	9,3%
significancia ²	4,67 ***	
significancia ³	-2,86 ***	

Nota: *** y ** indican significatividad estadística al 99,9% y 99% respectivamente.

En relación a los coeficientes estimados de las variables *deuda banco* y *deuda sistema*, si bien son estadísticamente significativos, sus efectos marginales evidencian que el impacto de estas variables en el riesgo del deudor es muy bajo. Las variables continuas que además de ser estadísticamente significativas, tienen efectos marginales relevantes, son *crecimiento económico*, *cobertura* y *significancia*.

Los resultados para el crecimiento del PBI¹⁷ muestran que en promedio un aumento en la tasa de crecimiento del PBI reduce el riesgo del deudor en un 36% aproximadamente. Este efecto marginal es sin embargo un promedio, ya que en la práctica el efecto real depende de las otras características del deudor incluidas en el modelo. A continuación, el **Gráfico III** es un gráfico de efectos marginales: muestra cómo cambian el *score* y la PD del deudor promedio a medida que se acelera el crecimiento de la economía.

Gráfico III. Crecimiento económico y PD

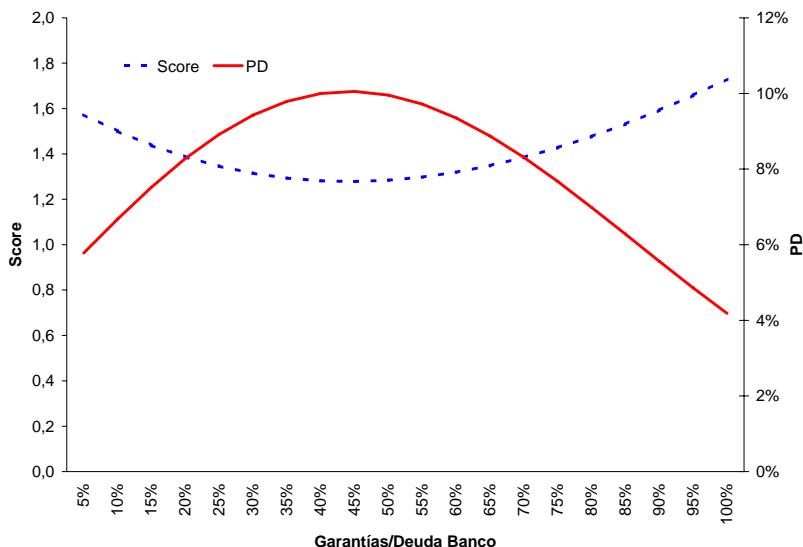


El efecto marginal de la variable *significancia* es de 9,3%. Esto indica que la PD aumenta en promedio un 9,3% cuando la deuda en la entidad gana participación en su endeudamiento total en el sistema. Sin embargo, esta variable tiene un efecto no lineal sobre el riesgo, por lo que el efecto marginal es sólo un promedio que debe complementarse con el análisis de gráficos marginales. Por último, la variable *cobertura* tiene un efecto marginal estimado de 14,9%. Esto indicaría que en la medida que la cobertura con garantías preferidas aumenta, también lo hace el riesgo. Sin embargo, esto se debe a que la relación es no lineal: el impacto

¹⁷ El comportamiento observado durante el período 2002-2003 eventualmente podría distorsionar la relación entre el riesgo de crédito y las variables empleadas en la estimación. Para verificar la confiabilidad de las estimaciones, un ejercicio consiste en estimar una versión alternativa del modelo sin la información del período 2002-2003, y comparar los parámetros estimados con los del modelo completo.

de la cobertura sobre la PD depende del nivel de cobertura. Esto se aprecia mejor en el **Gráfico IV**.

Gráfico IV. Cobertura con Garantías Preferidas y PD



La relación entre cobertura con garantías preferidas y riesgo no es lineal: para porcentajes bajos la relación es creciente, un aumento en el porcentaje cubierto con garantías preferidas está asociado a una mayor PD, mientras que esta relación se invierte cuando la cobertura es superior al 50% aproximadamente. Una interpretación plausible para el tramo creciente es que frecuentemente, y sobre todo para los deudores de naturaleza comercial¹⁸ con líneas *revolving*, cuando muestran signos de deterioro se les pide que entreguen garantías para mantener las líneas activas. Por otro lado, el tramo decreciente seguramente refleja el comportamiento de los deudores cuyas financiaciones están cubiertas con garantías de tipo prendario o hipotecario.

VII. Conclusiones

El trabajo revisó y buscó clarificar distintos aspectos asociados a los modelos de *credit scoring*. Aunque nada impide que estas técnicas se apliquen a grandes empresas, y de hecho existen algunos desarrollos para ellas, los modelos de *credit scoring* se emplean mayormente para evaluar individuos y pequeñas y medianas empresas, mientras que las grandes empresas se analizan a través de sistemas de *rating*. Si bien su aplicación más conocida es en la originación de financiaciones, las entidades financieras emplean estas herramientas también

¹⁸ La muestra empleada en la estimación incluye deudores PyME.

con otros propósitos, como por ejemplo en el diseño de estrategias de *marketing* para ofrecer productos de manera proactiva y masiva.

Los modelos de *credit scoring* difieren en la información que emplean, en función del sujeto evaluado (individuos o PyMEs) y del desarrollador del modelo (con datos de buró o de la entidad financiera). En cualquier caso, la revisión de la literatura especializada muestra que en su construcción predominan los enfoques econométricos (regresión logística, modelos probit) y desarrollos de inteligencia artificial, como los árboles de decisión. Los motivos para su predominio son básicamente dos: en general las metodologías relevadas muestran resultados similares, por lo que tienden a emplearse aquellas cuyo funcionamiento e interpretación son más sencillos, en contraposición a enfoques más sofisticados y de difícil interpretación, como ser las redes neuronales. Los resultados del modelo estimado con datos de la CENDEU, construido con el sólo propósito de funcionar como ejemplo, muestran la relevancia de las siguientes variables para predecir el comportamiento de los deudores: la historia de pagos y el comportamiento corriente en otras entidades financieras; la “búsqueda de financiamiento”, aproximada por la cantidad de entidades con la que los deudores operan; si la deuda está cubierta con garantías preferidas (como los hipotecarios y prendarios) y el grado de cobertura. Otra variable que tiene una importancia significativa, y cuya inclusión en cualquier modelo es crítica, es el nivel de actividad o PBI. Su rol en modelo estimado es el esperado: en los años buenos la creación de empleo y el aumento en las ventas mejoran la calidad crediticia de individuos y PyMEs, por lo que su riesgo disminuye.

Referencias

- Altman, E., “Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy”. *Journal of Finance*, September 1968.
- Amemiya, T., “Qualitative Response Models: A Survey”. *Journal of Economic Literature*, Volume 19, N° 4, December 1981, pgs. 1483-1536.
- Banco Central de la República Argentina, comunicaciones “A” 4325, 4559 y 4572.
- Banco Central de la República Argentina, “Sistemas de Información para la Administración del Riesgo de Crédito. Relevamiento en el Sistema Financiero Argentino”. Gerencia de Investigación y Planificación Normativa y Gerencia de Régimen Informativo, octubre de 2006.
- Basel Committee on Banking Supervision, “Studies on the Validation of Internal Rating Systems”. BCBS Publications N°14, May 2005.

- Boyes, W. J., Hoffman D. L. and Low, A. S., "An Econometric Analysis of the Bank Credit Scoring Problem". *Journal of Econometrics*, 40 (1989), pgs. 3-14.
- Cheung, S., "Provincial Credit Ratings in Canada, An Ordered Probit Analysis". Bank of Canada, Working Paper 96-6.
- Falkenstein, E., "RiskCalc™ For Private Companies: Moody's Default Model. Rating Methodology". Moody's Investor Service, Global Credit Research, May 2000.
- Gordy, M. B., "A Comparative Anatomy of Credit Risk Models". *Journal of Banking & Finance*, 24 (2000), pgs. 119-149.
- Greene, W. H., "A Statistical Model for *Credit Scoring*". October 1992, mimeo.
- Hand, D. J. and Henley, W. E., "Statistical Classification Methods in Consumer *Credit Scoring*: a Review". *Royal Statistical Society*, 160 (1997), Part 3, pgs. 523-541.
- Jennings, A., "The Importance of Credit Information and Credit Scoring for Small Business Lending Decisions". Fair, Isaac and Company Inc., mimeo.
- Mester, Loretta J., "What's the Point of *Credit Scoring*?". Federal Reserve Bank of Philadelphia, September/October 1997, pgs. 3-16.
- Milena, E., M. Miller and L. Simbaqueba, "The Case for Information Sharing by Microfinance Institutions: Empirical Evidence of the Value of Credit Bureau-Type Data in the Nicaraguan Microfinance Sector". The World Bank, June 2005, mimeo.
- Miller, M. and D. Rojas, "Improving Access to Credit for SMEs: An Empirical Analysis of the Feasibility of Pooled Data Small Business Credit Scoring Models in Colombia and Mexico". The World Bank, June 2005, mimeo.
- Nickell, P., Perrauidin, W. and Varotto, S., "Stability of Rating Transitions". Bank of England, December 1998.
- Powell, Andrew P., Mylenko, Nataliya, Miller, Margaret and Majnoni, Giovanni, "Improving Credit Information, Bank Regulation, and Supervision: On the Role and Design of Public Credit Registries". World Bank Policy Research Working Paper No. 3443, November 2004.
- Srinivasan, V. and Kim, Y. H., "Credit Granting: A Comparative Analysis of Classification Procedures". *The Journal of Finance*, vol. XLII, N° 3, July 1987.
- Ridpath, B. and Azarchs, T., "Standard & Poor's Response to the New Basel Capital Accord". Standard & Poor's, May 2001.
- Thomas, L. C., "A Survey of credit and behavioral scoring: forecasting financial risk of lending to consumers". *International Journal of Forecasting*, 16 (2000), pgs. 149-172.

Apéndice I. Probit binario: derivación de las condiciones de primer y segundo orden

El principio de máxima verosimilitud permite obtener un estimador para un parámetro o conjunto de parámetros. La densidad conjunta de n observaciones es el producto de las densidades individuales, se denomina función de verosimilitud y es función del vector θ de parámetros desconocidos:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) = L(\theta/X) \quad (1)$$

Tomando logaritmos,

$$\ln L(\theta/X) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i, \theta) = \ln L(\theta), \quad (2)$$

$\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil de θ que maximiza (1) y (2) y resuelve la condición de primer orden $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$.

Propiedades de los estimadores máximo verosímiles

Si $f(X_i, \theta)$ cumple ciertas condiciones de regularidad, $\hat{\theta}$ tiene las siguientes propiedades:

- I. **consistencia**: $\text{plim } \hat{\theta}_{\text{ml}} = \theta$.
- II. **normalidad asintótica**: $\hat{\theta} \xrightarrow{a} N[\theta, \{I(\theta)\}^{-1}]$, con $I(\theta) = -E \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta^T}$.
- III. **eficiencia asintótica**, y alcanza el límite inferior de *Cramer-Rao* para estimadores consistentes (la mínima varianza alcanzable por un estimador consistente).
- IV. **invarianza**: el estimador máximo verosímil de $\gamma = c(\theta)$ es $c(\hat{\theta})$.

Probit binario: derivación de la función de verosimilitud¹⁹

Sabiendo que $Pr(Y_i = 1) = F(\beta' X_i) = p$ y $Pr(Y_i = 0) = 1 - F(\beta' X_i) = 1 - p$, si se supone que Y es una realización de un proceso *Bernoulli* se puede escribir,

$$Pr(Y_i = y) = p^y (1-p)^{1-y} \text{ o también } Pr(Y_i = y) = F(\beta' X_i)^y (1 - F(\beta' X_i))^{1-y}. \quad (3)$$

Para una muestra independiente de Y_1, \dots, Y_n :

¹⁹ Para compactar la notación, en el Apéndice I la transposición de vectores se identifica con ' y no con T . A su vez, X y β continúan representando vectores, pero sin embargo no se identifican en negrita.

$$\begin{aligned}
Pr(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) &= \prod_{i=1}^n Pr(Y_i = y_i) \\
&= \prod_{i=1}^n F(\beta' X_i)^{y_i} (1 - F(\beta' X_i))^{1-y_i} \\
&= \prod_{i=1}^n F(\beta' X_i)^{y_i} \prod_{i=1}^n (1 - F(\beta' X_i))^{1-y_i} = L
\end{aligned} \tag{4}$$

que por definición es una función de verosimilitud. Tomando logaritmos, la función logarítmica de verosimilitud es:

$$\ln L = \ln \left[\prod_{i=1}^n (F(\beta' X_i))^{y_i} \right] + \ln \left[\prod_{i=1}^n (1 - F(\beta' X_i))^{1-y_i} \right] \tag{5}$$

Si ε_i se distribuye *iid* $N(0, \sigma^2)$, sabemos que

$$P_i = E(Y_i | \Omega_i) = F(\beta' X_i) = \Phi(\beta' X_i) \equiv \int_{-\infty}^{\beta' X_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds,$$

donde β y σ no están identificados por lo que no se pueden estimar separadamente. Sólo se puede estimar β/σ , por lo que se supone que σ es igual a 1. Siendo ε_i gaussiano la función a maximizar es,

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \left[\prod_{i=1}^n (\Phi(\beta' X_i))^{y_i} \right] + \ln \left[\prod_{i=1}^n (1 - \Phi(\beta' X_i))^{1-y_i} \right] \text{ o,} \\
\ln L &= \sum_{i=1}^n y_i \ln(\Phi(\beta' X_i)) + \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \ln(1 - \Phi(\beta' X_i))
\end{aligned} \tag{6}$$

Probit binario: condiciones de primer orden

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n y_i \ln(\Phi(\beta' X_i)) \right]}{\partial \beta} + \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n (1 - y_i) \ln(1 - \Phi(\beta' X_i)) \right]}{\partial \beta} \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\phi(\beta' X_i) X_i}{\Phi(\beta' X_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{(1 - y_i)}{[1 - \Phi(\beta' X_i)]} [-\phi(\beta' X_i)] X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i}{\Phi(\beta' X_i)} + \frac{(1 - y_i)}{(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i (1 - \Phi(\beta' X_i)) - (1 - y_i) \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i) (1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i) (1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i
\end{aligned} \tag{7}$$

que es igual a cero cuando se evalúa en los coeficientes estimados b_j .

Probit binario: condiciones de segundo orden (derivación de la matriz de información)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta'} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta'} \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i + \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \frac{\partial}{\partial \beta'} (\phi(\beta' X_i) X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta'} \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \phi(\beta' X_i) X_i + \left[\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] X_i' X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta'} \left(\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right) \phi(\beta' X_i) X_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \Phi(\beta' X_i)}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right) X_i' X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{-\phi(\cdot) X_i' \Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot)) - (y_i - \Phi(\cdot))[\phi(\cdot) X_i' (1 - \Phi(\cdot)) + \Phi(\cdot)(-\phi(\cdot) X_i')]}{[\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))]^2} \right) \phi(\beta' X_i) X_i \right] + \dots \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{-\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i)) - (y_i - \Phi(\beta' X_i))[1 - 2\Phi(\beta' X_i)]}{[\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))]^2} \right) \frac{\phi(\beta' X_i)^2 X_i' X_i}{[\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))]^2} \right] + \dots \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\left(-1 + \frac{(\Phi(\beta' X_i) - y_i)[1 - 2\Phi(\beta' X_i)]}{[\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))]^2} \right) \frac{\phi(\beta' X_i)^2 X_i' X_i}{[\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))]^2} \right] + \dots \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\left(-1 + \frac{(\Phi(\cdot) - y_i)[1 - 2\Phi(\cdot)]}{[\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))]^2} \right) \frac{\phi(\cdot)^2 X_i' X_i}{[\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))]^2} \right] + \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \Phi(\cdot)}{\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))} \right) X_i' X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(-1 + \frac{(\Phi(\cdot) - y_i)[1 - 2\Phi(\cdot)]}{[\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))]^2} \right) \frac{\phi(\cdot)^2 X_i' X_i}{[\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))]^2} + \left(\frac{y_i - \Phi(\cdot)}{\Phi(\cdot)(1 - \Phi(\cdot))} \right) X_i' X_i \right\}
\end{aligned}$$

Para estimar la matriz de información se calcula la esperanza matemática de $-\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}$. Al hacerlo, $(\Phi(\beta' X_i) - y_i)$ se anula y se obtiene la matriz de información,

$$I(\hat{\beta}) = \left\{ - \sum_{i=1}^n \left[\frac{-\phi(\beta' X_i)^2 X_i' X_i}{\Phi(\beta' X_i)(1 - \Phi(\beta' X_i))} \right] \right\} \quad (8)$$

cuya inversa da la estimación de las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros estimados.

Apéndice II. Modelos multinomiales o de respuesta múltiple

Cuando Y toma más de dos valores (es policotómica), el método a emplear en la estimación depende de su naturaleza. Por ejemplo, Y puede ser el resultado de un sistema de *rating* que asigna calificaciones de riesgo. En este caso Y no sólo es cualitativa multinomial o policotómica sino que tiene un orden inherente, por lo que es una variable ordinal: los valores que puede tomar tienen un ordenamiento inherente e implican una jerarquía. En este caso para la estimación se emplea un probit o logit ordenado.

El probit ordenado

Sea y^* un índice no observado o latente de calidad crediticia. Se supone que es función lineal de ciertas variables explicativas contenidas en el vector \mathbf{X}_i , a las cuales les corresponden coeficientes del vector β , y de un término de error gaussiano. La expresión para y^* viene dada por

$$y_i^* = -\beta^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

El índice y^* subyace detrás de la calificación asignada. En un esquema de calificación estructurado en 5 *ratings*, como es el del BCRA, se puede pensar que las distintas calificaciones están definidas por rangos de y^* de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} Y_i = 1 & \quad \text{si } y_i^* \leq 0, \\ Y_i = 2 & \quad \text{si } 0 < y_i^* \leq \mu_2, \\ Y_i = 3 & \quad \text{si } \mu_2 < y_i^* \leq \mu_3, \\ Y_i = 4 & \quad \text{si } \mu_3 < y_i^* \leq \mu_4, \\ Y_i = 5 & \quad \text{si } \mu_4 < y_i^* \end{aligned} \quad (2)$$

Los μ 's son los *cut points* que definen los rangos de las distintas calificaciones, que se estiman conjuntamente con el vector β , imponiendo la restricción²⁰ de que $0 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$. La probabilidad de obtener la mejor calificación, 1, es:

$$P(Y_i = 1) = P(y_i^* \leq 0) = P(\varepsilon_i - \beta^T \mathbf{X}_i \leq 0) = P(\varepsilon_i \leq \beta^T \mathbf{X}_i) \quad (3)$$

Como $\varepsilon_i \sim N(0,1)$,

$$P(\varepsilon_i \leq \beta^T \mathbf{X}_i) = \Phi(\beta^T \mathbf{X}_i) \quad (4)$$

La probabilidad asociada a las restantes calificaciones se calcula como se muestra a continuación.

²⁰ Para obtener probabilidades positivas.

$$\begin{aligned}
P(Y_i = 1) &= F(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) = \Phi(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) \\
P(Y_i = 2) &= F(\mu_2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - F(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) \\
P(Y_i = 3) &= F(\mu_3 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - F(\mu_2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) \\
P(Y_i = 4) &= F(\mu_4 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - F(\mu_3 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) \\
P(Y_i = 5) &= 1 - F(\mu_4 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i)
\end{aligned} \tag{5}$$

Tomando derivadas en la función de probabilidad condicional respecto de la variable k , existen tantos efectos marginales como posibles niveles de calificación, en este caso cinco:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(Y_i = 1)}{\partial X_{ik}} &= (f(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i))\beta_k \\
\frac{\partial P(Y_i = 2)}{\partial X_{ik}} &= (f(\mu_2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - f(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i))\beta_k \\
\frac{\partial P(Y_i = 3)}{\partial X_{ik}} &= (f(\mu_3 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - f(\mu_2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i))\beta_k \\
\frac{\partial P(Y_i = 4)}{\partial X_{ik}} &= (f(\mu_4 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) - f(\mu_3 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i))\beta_k \\
\frac{\partial P(Y_i = 5)}{\partial X_{ik}} &= (1 - f(\mu_4 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i))\beta_k
\end{aligned} \tag{6}$$

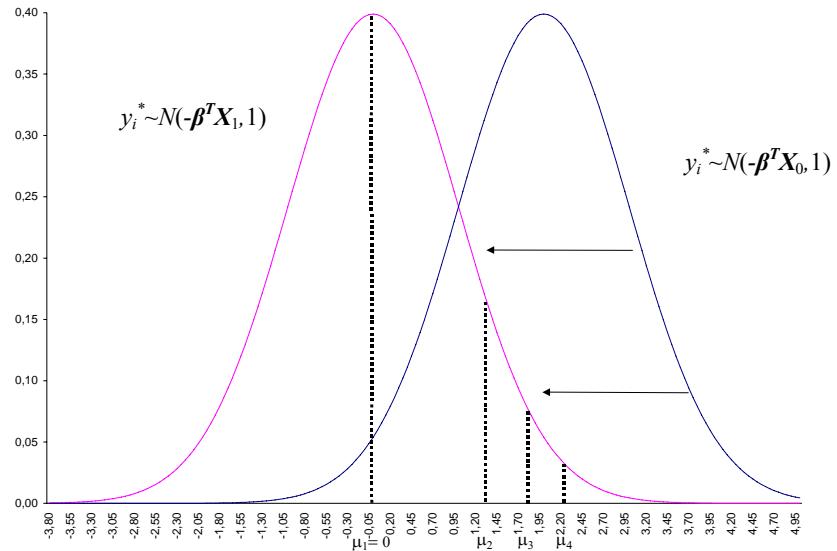
Combinando (2) y (3) reescribimos los rangos que definen las calificaciones como,

$$\begin{aligned}
Y_i = 1 &\quad \text{si } y_i^* = -\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i \leq 0, \\
Y_i = 2 &\quad \text{si } 0 < -\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i \leq \mu_2, \\
Y_i = 3 &\quad \text{si } \mu_2 < -\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i \leq \mu_3, \\
Y_i = 4 &\quad \text{si } \mu_3 < -\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i \leq \mu_4, \\
Y_i = 5 &\quad \text{si } \mu_4 < -\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i + \varepsilon_i
\end{aligned} \tag{7}$$

Como $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, $(y_i^* + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i = \varepsilon_i) \sim N(0,1)$ o también $(y_i^* = \varepsilon_i - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i) \sim N(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i, 1)$. (8)

Los cambios en la probabilidad de tener las distintas situaciones ante un cambio en alguna de las variables explicativas se deben a un desplazamiento de la distribución del *score*. Según (8) el *score* tiene una distribución normal con media $-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}_i$ que se desplaza sobre los *cut points* ante cambios en el *score*. Por ejemplo, el cambio en una variable que incrementa el *score* de un individuo desplaza su distribución a la izquierda, incrementando la probabilidad de que tenga $Y_i=1$ (ver **Gráfico V**).

Gráfico V



Probit ordenado: derivación de la función de verosimilitud

Cuando la variable es policotómica y ordinal, para estimar el probit ordenado se supone que Y tiene una distribución multinomial (una generalización de la binomial para más de dos categorías). En este caso la función de verosimilitud se obtiene como,

$$Pr(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^n Pr(Y_i = y_i) = L$$

$$L = \prod_{y_i=1} P(Y_i = 1) \prod_{y_i=2} P(Y_i = 2) \prod_{y_i=3} P(Y_i = 3) \prod_{y_i=4} P(Y_i = 4) \prod_{y_i=5} P(Y_i = 5)$$

Tomando logaritmos,

$$\ell(\beta, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sum_{y_i=1} \log(P(Y_i = 1)) + \sum_{y_i=2} \log(P(Y_i = 2)) + \sum_{y_i=3} \log(P(Y_i = 3)) + \sum_{y_i=4} \log(P(Y_i = 4)) + \sum_{y_i=5} \log(P(Y_i = 5))$$

$$\ell(\beta, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sum_{y_i=1} \log(\Phi(\beta^T X_i)) + \sum_{y_i=2} \log(\Phi(\mu_2 + \beta^T X_i) - \Phi(\beta^T X_i)) + \sum_{y_i=3} \log(\Phi(\mu_3 + \beta^T X_i) - \Phi(\mu_2 + \beta^T X_i)) + \sum_{y_i=4} \log(\Phi(\mu_4 + \beta^T X_i) - \Phi(\mu_3 + \beta^T X_i)) + \sum_{y_i=5} \log(1 - \Phi(\mu_4 + \beta^T X_i))$$

Al igual que en el probit, al resolver con métodos numéricos las condiciones de primer orden se obtienen las estimaciones de los parámetros β y los *cut points*. Con estas estimaciones se evalúa la matriz de derivadas parciales segundas. Esta matriz, con el signo invertido, es la matriz de información, y la inversa de la matriz de información da la estimación de las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros estimados.