Ensayos Económicos | **45**

ie | BCRA

Investigaciones Económicas
Banco Central
de la República Argentina

Ensayos Económicos es una revista editada por la Subgerencia General
de Investigaciones Económicas

ISSN 0325-3937

Banco Central de la República Argentina
Reconquista 266 / Edificio Central Piso 8
(C1003ABF) Ciudad Autónoma de Buenos Aires / Argentina
Tel.: (+5411) 4348-3719 / Fax: (+5411) 4000-1257
Email: investig@bcra.gov.ar / http://www.bcra.gov.ar

Fecha de publicación: octubre de 2006

Queda hecho el depósito que establece la Ley 11.723.

Diseño editorial
Banco Central de la República Argentina
Gerencia Principal de Comunicaciones y Relaciones Institucionales
Área de Imagen y Diseño

Impreso en Ediciones Gráficas Especiales.
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, octubre de 2006
Tirada de 2000 ejemplares.

Una Nota sobre Regresiones con Variables Integradas

Hildegart A. Ahumada*
Universidad Torcuato Di Tella

Resumen

El propósito de esta nota es contribuir a la modelización de series temporales que pueden ser caracterizadas como integradas. En particular se discute la cuestión del uso de distribuciones estándares en modelos de regresión. Para ello se revisan previamente algunos conceptos esenciales. El objetivo principal es analizar a través de ejemplos las transformaciones necesarias para formular el modelo con variables estacionarias, enfatizando que dichas transformaciones no deben ser necesariamente llevadas a cabo. Se presentan también distintos casos de interés práctico como la representación en niveles o en diferencias en el análisis de no causalidad en sentido de Granger y los modelos autorregresivos de rezagos distribuidos.

* Agradezco los comentarios y sugerencias de M. Lorena Garegnani y Fernando Navajas como así también los de mis alumnos de la UTDT y de los asistentes al curso de Pronóstico dictado en 2005 en el BCRA. Todo error u omisión es sólo de mi responsabilidad. Dirección de correo electrónico: hahumada@utdt.edu.

I. Introducción

Los efectos de incluir variables integradas en modelos de regresión han causado preocupación desde largo tiempo atrás, a raíz del llamado problema de correlación "espuria" (Granger y Newbold, 1974) y que se remonta al análisis de las *non-sense regressions* de Yule (1926). En ambos casos la dificultad planteada radica en que las regresiones con variables integradas pueden producir relaciones "aparentemente" significativas aún cuando las series sean independientes.[1]

Si bien la solución propuesta a principios de los setenta para evitar este problema fue la "diferenciación" de las variables, un replanteamiento de la cuestión aparece en los ochenta con la idea de cointegración: la relación de largo plazo entre variables integradas (Engle y Granger,1987). Asimismo, esta misma cuestión aparece contemplada en la econometría dinámica y en la idea de "relaciones de equilibrio" originalmente modelada a través de los mecanismos de "Corrección de Errores" (Sargan, 1964, Davidson, Hendry, Srba y Yeo,1978).

No obstante el tiempo transcurrido y la abundante literatura disponible sobre el tema, la preocupación sigue vigente ya que frecuentemente la práctica econométrica debe enfrentar decisiones relacionadas con dicha cuestión. Tal sería el caso de evaluar "causalidad en sentido de Granger" con variables en niveles o en diferencias.

Para mostrar una perspectiva más general se puede señalar que, una vez que la dificultad de fondo (distinguir relaciones genuinas de las espurias) es reconocida, el investigador enfrenta el hecho de que las pruebas de consistencia y normalidad asintótica de los estimadores usuales (MCO) que aprendió suponen estacionariedad de las variables. De allí los esfuerzos por "transformar" sus datos para volver a un mundo estacionario (ya sea por diferenciación o por cointegración) y estimar su modelo con variables estacionarias.

---

[1] Yule usa la expresión "espuria" para referirse a una regresión entre variables no relacionadas entre sí pero que muestran alta correlación a causa de una tercera variable que explica a las incluidas en dicha regresión.

El propósito de esta nota es contribuir a la modelización econométrica centrándose en que, aunque se debe ser consciente de la naturaleza integrada de muchas variables económicas, no siempre es necesario realizar "efectivamente" las mencionadas transformaciones. Para ello se analizan, a través de ejemplos, algunos de los casos más usuales de modelos de regresión que incluyen variables integradas. De este modo, el objetivo es explicar lo más intuitivamente posible cuándo (y cómo) pueden utilizarse distribuciones estándares (estadísticos t, F) para evaluar hipótesis sobre los coeficientes de tales regresiones.

La respuesta formal fue dada por Sims, Stock y Watson, SSW (1990) y discutida asimismo en Banerjee et. al. (1993, especialmente el cap. 6), Hendry (1995) y Doornik y Hendry (1996).

La conclusión de SSW es que en formulaciones generales que incluyan variables integradas junto a otras que no lo sean y componentes determinísticos, aquellos estimadores de parámetros que puedan ser escritos como coeficientes de regresores no-integrados con media cero, tienen distribuciones estándares. Pero lo más importante es que esto es válido solo con la existencia (potencial) de la transformación a estacionariedad (con media cero) aunque ésta no sea efectivamente llevada a cabo. Un supuesto crítico en SSW es que el modelo esté correctamente especificado.[2]

La sección siguiente revisa algunos conceptos importantes para la discusión siguiente. La sección III presenta los casos aplicados a regresiones con variables cointegradas (sección III.1), a la evaluación de no-causalidad en sentido de Granger (sección III.2) y a los modelos auto-regresivos de rezagos distribuidos, AD (sección III.3). La sección IV concluye esta nota.

[2] En el contexto de modelos dinámicos que los errores sean una secuencia de diferencias martingalas.

II. Algunos Conceptos

Veamos primero algunas definiciones:

Una variable x_t es estacionaria (débil) si su esperanza y varianza son constantes para todo t y su covarianza (digamos entre x_t y x_{t+h}) no depende de t sino sólo del intervalo de separación (es constante para cada h)

> x_t es $\mathrm{I}(1)$ integrada de orden 1 si Δx_t es $\mathrm{I}(0)$, estacionaria a través de la diferenciación.

Y en general,

> x_t es $\mathrm{I}(\mathrm{d})$ integrada de orden d si $\Delta^{\mathrm{d}} x_t$ es $\mathrm{I}(0)$, estacionaria a través de la diferenciación aplicada *d* veces. En esta nota nos concentraremos sólo en el caso de variables $\mathrm{I}(1)$.

Conviene recordar que no toda variable no estacionaria se identifica como integrada ya que puede ser no estacionaria por otras caracterizaciones como la heterocedasticidad o por estar sujetas a cambios estructurales.

Lo que sí parece evidente es que si una variable es no estacionaria porque es integrada, puede por diferenciación resultar estacionaria. Sin embargo, la diferenciación no es la única forma de lograr estacionariedad cuando se consideran dos o más variables integradas, la otra forma de obtenerla es a través de la cointegración, que se discute posteriormente.

Previamente conviene revisar el modelo más usual para representar una variable integrada que es el de camino aleatorio (*random walk*). Justamente este modelo sirve como "patrón" de comportamiento de variables $\mathrm{I}(1)$ y es la base de la mayor parte de los tests de raíces unitarias.

Si y_t es un camino aleatorio, entonces

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim IN(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{1}$$

ó

$$y_t = \sum_1^t \varepsilon_i \tag{2}$$

y en particular su varianza

$$VAR(y_t) = E\left[\left(\sum_1^t \varepsilon_i\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_1^t \varepsilon_i^2\right)\right] = \sum_1^t E\left(\varepsilon_i^2\right) = t\ \sigma_\varepsilon^2 \qquad (3)$$

Por lo tanto se pueden apreciar para este caso dos características esenciales de toda variable integrada: larga memoria de los shocks pasados (ecuación 2) y varianza tendiendo a infinito cuando t lo hace (ecuación 3).

De estas expresiones podemos ver que un camino aleatorio debe ser apropiadamente estandarizado para obtener una distribución límite de buen comportamiento,[3] es decir mientras:

$$y_T \sim IN(0, T\sigma_\varepsilon^2) \qquad (4)$$

$$y_T / \sqrt{T} \sim IN(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad (5)$$

La estandarización apropiada es también útil para entender el problema de la correlación espuria, que resumimos a continuación.

Supongamos que corremos una regresión entre dos caminos aleatorios independientes,

$$\Delta y_t = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim IN(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad (6)$$

$$\Delta x_t = \upsilon_t \qquad \upsilon_t \sim IN(0, \sigma_v^2) \qquad (7)$$

$$E[\varepsilon_t \ \upsilon_t] = 0$$

$$y_t = \beta x_t + \mu_t \qquad (8)$$

Entonces, siendo b el estimador por MCO de β, el estadístico "t" para evaluar la hipótesis de nulidad de dicho coeficiente será

$$t_{\beta=0} = \frac{b}{SE(b)} \qquad (9)$$

[3] Suponemos $y_o=0$. Por otra parte el supuesto de Normalidad no es necesario, sólo alcanzaría el supuesto de IID. Formalmente la teoría asintótica de variables integradas se analiza a través de la convergencia de éstas a procesos de Wiener (especie de caminos aleatorios "continuos").

Aunque $E\,[b] = \beta = 0$ el problema está en el SE porque:[4]

$$SE(b) = \frac{s_\mu}{\sqrt{\sum x_t^2}} \tag{10}$$

y como x_t es una variable $\mathrm{I}(1)$, para que el denominador tenga buen comportamiento, (ver ecuación 5).

$$SE(b) = T^{-1}\frac{s_\mu}{\sqrt{T^{-2}\sum x_t^2}} \tag{11}$$

Pero como el error residual será también $\mathrm{I}(1)$:

$$s_\mu^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-1} \approx T.\left(T^{-2}\sum \hat{u}_t^2\right) \tag{12}$$

De la ecuación (11) y de la raíz cuadrada de la ecuación (12) podemos ver que el $SE(b)$ decrecerá con T, como lo haga $\frac{1}{\sqrt{T}}$.

Y en consecuencia,

$$t_{\beta=0} = \frac{b}{SE(b)} \approx \sqrt{T}.\ b \tag{13}$$

Por lo tanto habría que dividir al estadístico "t" por la raíz de T para que tenga una distribución bien definida, sino crecerá con T llevando a un sobre-rechazo si usamos el criterio convencional de 2 (en valor absoluto, al 5%). Esto explica porqué debemos prestar atención en las regresiones entre variables integradas. Sin embargo, las ecuaciones estáticas tienen otro sentido si estas variables no son independientes sino que guardan una relación de largo plazo, en otras palabras, están cointegradas.

Para el caso de relaciones entre variables integradas puede recordarse que si y_t y x_t son ambas $\mathrm{I}(1)$, y "existe" una combinación lineal de ellas:

$$\mu_t = y_t - \beta\, x_t \tag{14}$$

que es $\mathrm{I}(0)$, entonces y_t y x_t están cointegradas, siendo $(1\text{-}\beta)$ el vector de cointegración.

---

[4] Para ver el valor esperado del denominador notemos que

$$E\sum x_t^2 = \sum E(x_t^2) = \sigma_v^2 \sum t \approx \frac{\sigma_v^2}{2} T.(T+1)$$

y por lo tanto no alcanza dividirlo por T para que no crezca con T: de allí la división por T^2.

Nótese que en este caso μ_t corresponde al error de la regresión estática que es la base de la metodología propuesta por Engle y Granger para evaluar cointegración, la cual será analizada en la sección siguiente.

III. ¿Cuándo usar distribuciones estándares?

III.1. El caso de regresiones con variables cointegradas

La regresión estática para el caso de variables cointegradas puede pensarse como balanceada (de acuerdo con Granger, 1990),

$$\underset{\mathrm{I}(1)}{y_t} = \beta \underset{\mathrm{I}(1)}{x_t} + \underset{\mathrm{I}(0)}{\mu_t} \tag{15}$$

Este balance entre los dos lados de la ecuación es justamente lo que distingue el caso de una relación de largo plazo entre variables integradas (cointegradas) del de una relación espuria analizada en la sección anterior. Incluso en este caso el estimador de β es superconsistente (converge más rápido que en el caso de variables estacionarias) dado que a diferencia del caso anterior el error es estacionario.

Sin embargo, es importante señalar que aún en este caso no se puede usar el estadístico "t" para evaluar hipótesis sobre β ya que μ_t, en general, no es ruido blanco en una ecuación como (15) que omite dinámica. Sólo debe ser $\mathrm{I}(0)$ en una relación de cointegración.

Es interesante comparar este caso con el siguiente, por simplicidad supongamos β = 1,

$$\underset{\mathrm{I}(0)}{\Delta y_t} = \beta_0 + \beta_1 \underset{\mathrm{I}(0)}{\Delta x_t} + \gamma \underset{\mathrm{I}(0)}{\left(y_{t-1} - x_{t-1}\right)} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \tag{16}$$

La ecuación (16), que supone una representación de *Equilibrium Correction,* no sólo está balanceada sino reparametrizada como $\mathrm{I}(0)$.[5] Esto, y dado que ε_t es ruido blanco, permite aplicar distribuciones estándares a la manera usual. El punto a señalar es que esta reparametrización supone que β es conocido ($\beta = 1$). Esta ecuación podría considerarse como la segunda etapa en el procedimiento de Granger y Engle, donde el residuo de (15) es $(y_{t-1} - x_{t-1})$.

Otro caso que vale la pena tener en cuenta es el siguiente (que coincide con (16) cuando $\beta_1 = 0$, además de la homogeneidad de largo plazo, aquí $\gamma = -\beta_2$).

$$\underset{\mathrm{I}(0)}{\Delta y_t} = \beta_0 + \beta_2 \underset{\mathrm{I}(1)}{x_{t-1}} + \gamma \underset{\mathrm{I}(1)}{y_{t-1}} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \tag{17}$$

Este caso es aún más interesante ya que a pesar de que las variables son $\mathrm{I}(1)$ igualmente podemos usar distribuciones estándares para test sobre coeficientes individuales *"t".* Nótese que esta ecuación está balanceada y los errores son ruido blanco (condiciones necesarias). Pero lo más importante es que cada uno de los coeficientes puede ser escrito como el coeficiente de una variable estacionaria $(y_{t-1} - x_{t-1})$ o $(x_{t-1} - y_{t-1})$ que es lo requerido por el resultado de SSW.

Sin embargo, con esta ecuación no se admitiría un test conjunto de ambos coeficientes como el F para evaluar H_o: $\gamma = \beta_2 = 0$. Intuitivamente ambos coeficientes no pueden ser escritos (a la vez) como coeficientes de variables $\mathrm{I}(0)$. Esto mismo puede apreciarse reescribiendo (17) (sumando y restando γx_{t-1}) como:

$$\underset{\mathrm{I}(0)}{\Delta y_t} = \beta_0 + (\beta_2 + \gamma) \underset{\mathrm{I}(1)}{x_{t-1}} + \gamma \underset{\mathrm{I}(0)}{(y_{t-1} - x_{t-1})} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^{-2}\right) \tag{18}$$

[5] Los primeros trabajos hacían referencia este tipo de modelo como *error correction*. Sin embargo, la corrección es sólo hacia una relación de equilibrio o de largo plazo que pueden estar sujetas a errores. Los desarrollos recientes de la teoría de pronóstico indican que justamente es la media de largo plazo la responsable más frecuente de las fallas de pronóstico (ver Hendry, 1995 y Clements and Hendry, 1999).

En este caso la distribución de γ sigue siendo estándar pero la de la variable $x_{t-1,}$ no. Nótese asimismo aunque los errores son ruido blanco, en esta parametrización, la ecuación no está balanceada.

A continuación se discuten estos resultados para dos aplicaciones prácticas usuales en series temporales: la evaluación de no causalidad en sentido de Granger y la obtención de la relación de largo plazo entre variables integradas a partir de un modelo Autorregresivo de rezagos Distribuidos, AD(1,1).

III.2. Evaluación de no causalidad en sentido de Granger

Dentro de la práctica econométrica, una vieja discusión es si esta evaluación debe realizarse con las variables en niveles o en sus primeras diferencias.[6] La siguiente presentación tratará de mostrar las ventajas y desventajas de cada una de estas alternativas. El procedimiento puede dividirse en dos etapas: a) la determinación del rezago apropiado en la representación autorregresiva de cada variable (por ejemplo, de y) y b), dado a), en una segunda etapa, la evaluación del efecto adicional de los rezagos de la otra variable (x) sobre la primera (y). Ambas etapas son discutidas por SSW. Aquí ejemplificamos para un caso sencillo (inicialmente con tres rezagos).

III.2.a. Determinación del orden del AR

$$y_t = \phi_0 + \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2\, y_{t-2} + \phi_3\, y_{t-3} + \eta_t \qquad \eta_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\eta^2\right) \qquad (19)$$

Por ejemplo, puede ser interesante evaluar, a través de un estadístico F, si

$$\mathrm{H}_0 :\ \phi_2 = \phi_3 = 0$$

Esta evaluación sí puede realizarse con una distribución estándar (F), a pesar de que y_t sea $\mathrm{I}(1)$, ya que tanto ϕ_2 como ϕ_3 pueden escribirse como coeficientes de variables $\mathrm{I}(0)$ (de las primeras diferencias), es decir,

---

[6] A continuación nos referiremos a la metodología propuesta por Granger y que es la más usual en los *softwares* econométricos. Para otras propuestas para analizar empíricamente el concepto de no causalidad en sentido de Granger puede consultarse Harvey (1990), entre otros.

$$\Delta y_t = \phi_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \text{ -}1)\, y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3)\, \Delta y_{t-1} - \phi_3\, \Delta y_{t-2} + \eta_t \qquad (20)$$

Nótese asimismo que la distribución del coeficiente de y_{t-1} es no estándar, en realidad, corresponde al de un estadístico Dickey-Fuller aumentado (DFA). Lo que se vuelve a ver en este caso es la combinación de distribuciones estándares y no estándares en la misma ecuación. Este mismo enfoque es aplicable a la determinación del rezago apropiado en una ecuación para obtener el DFA y para un modelo AD.

III.2.b. Evaluación del efecto adicional de los rezagos de la otra variable

Si suponemos que no rechazamos la H_o de la Subsección III.2.a, el test de no causalidad en sentido de Granger, supondría evaluar en la siguiente ecuación

$$y_t = \phi_0 + \phi_1\, y_{t-1} + \theta\, x_{t-1} + \nu_t \qquad \nu_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\nu^2\right) \qquad (21)$$

si $H_o : \theta = 0$

Pero, la distribución de θ será estándar sólo si y_t y x_t están cointegradas. En realidad, la ecuación (21) es igual a la (17) con $\gamma = (\phi_1 - 1)$.

Esto es también válido para rezagos de órdenes mayores, digamos 3

$$y_t = \phi_0 + \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2\, y_{t-2} + \phi_3\, y_{t-3} + \theta_1\, x_{t-1} + \theta_2\, x_{t-2} + \theta_3\, x_{t-3} + \nu_t \qquad (22)$$

que puede reescribirse como (ver una reparametrización similar también en Banerjee, et. al. 1993, p.178),

$$\begin{aligned} \Delta y_t = \phi_0 &+ \left[(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 1) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\right] \mathrm{y}_{t-1} - \\ &- (\phi_2 + \phi_3)\Delta y_{t-1} - \phi_3 \Delta\, y_{t-2} + \theta_1\, (x_{t-1} - y_{t-1}) + \\ &+ \theta_2\, (x_{t-2} - y_{t-2}) + \theta_3\, (x_{t-3} - y_{t-3}) + \nu_t \end{aligned} \qquad (23)$$

Por lo cual es válido un test conjunto del tipo

$$H_o :\ \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$$

siempre y cuando exista cointegración.

En resumen, niveles o diferencias para evaluar no causalidad es lo mismo en lo referente a determinar el orden de los modelos auto-regresivos. Sin embargo, no es lo mismo para el efecto adicional de los rezagos de la otra variable. Si se toman las variables en diferencias no habría que preocuparse por la relación de cointegración pero está presente el problema de variables omitidas, ya que se pierde la información sobre la relación de largo plazo (dado por los niveles). Esto puede verse aún más claro reescribiendo (22) como,

$$\begin{aligned}\Delta y_t = {} & \phi_0 + (\phi_1 - 1)\Delta y_{t-1} + (\phi_2 + \phi_1 - 1)\Delta y_{t-2} + \\ & + (\phi_3 + \phi_2 + \phi_1 - 1)\, y_{t-3} + \theta_1\, \Delta x_{t-1} + (\theta_1 + \theta_2)\, \Delta x_{t-2} + \\ & + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) x_{t-3} + \nu_t\end{aligned} \tag{24}$$

En la ecuación (24) podemos observar como una evaluación en diferencias omitiría los efectos de x_{t-3} y de y_{t-3} (los efectos de los niveles son los mismos que reescribiendo estos para el primer rezago).

La alternativa es evaluar no causalidad para las variables expresadas en niveles pero verificando o suponiendo cointegración. El *trade-off* está planteado.

III.3. Obtención de un modelo de Equilibrium-Correction a partir de un modelo AD

Un resultado conocido en la literatura (Banerjee et. al., 1993) es que la relación de largo plazo entre variables integradas estimada a partir de modelos uniecuacionales dinámicos es superior a la obtenida de la regresión estática (ecuación 15) debido a los sesgos en muestras finitas (a pesar de su superconsistencia). Por tal motivo es interesante analizar este caso con referencia al uso de distribuciones estándares. Tomamos como punto de partida un modelo autorregresivo de rezagos distribuidos de primer orden, un AD(1,1), como lo sugiere la metodología general a particular.[7] Con respecto a la elección de los rezagos para cada variable requiere el mismo análisis de la subsección III.2.a.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \tag{25}$$

---

[7] Un panorama integral de este enfoque se encuentra en Campos, et. al. (2005).

La cual es equivalente a:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + (\beta_1 + \beta_2) x_{t-1} + (\beta_3 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \qquad (26)$$

que puede ser reescrita como un modelo de *Equilibrium-Correction:*

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \gamma\left(y_{t-1} - K\, x_{t-1}\right) + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \qquad (27)$$

donde:

$$K = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{1 - \beta_3} \quad ; \quad \gamma = -\,(1 - \beta_3)$$

En todos los casos estas parametrizaciones son compatibles con distribuciones estándares de los coeficientes individuales ("t") con la condición de que estén cointegradas. En esta formulación el vector de cointegración es $(1 - K)$. Sin embargo, las mismas consideraciones que en la sección III son las relevantes para tests conjuntos sobre los coeficientes de x_{t-1} e y_{t-1}, debido a que son las mismas ecuaciones si se supone $\beta_1 = 0$.

Pero la cuestión es que K es la relación de largo plazo entre variables integradas si Y_t y X_t están cointegradas o lo que es lo mismo, si γ es distinto de cero. Para evaluarlo en (11) debemos conocer K. Podemos hacerlo sin conocer K a partir de la estimación irrestricta de (9) ó (10) a través de evaluar si:

$$H_o : \gamma = (\beta_3 - 1) = 0$$

Sin embargo, bajo la hipótesis nula (no cointegración) la distribución es no estándar (*PCGive* reporta los valores críticos apropiados como *unit root tests* luego de la ecuación de largo plazo, ver Doornik y Hendry, 2001).

Dos comentarios finales son relevantes para este análisis,

i) Lo importante para determinar cointegración es el coeficiente de ajuste γ y no la relación de largo plazo, K. Para ver esto, puede señalarse que se podría también evaluar esta hipótesis de una relación de homogeneidad (K = 1) si se agrega a la ecuación algún rezago de X. Es decir,

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \gamma\left(y_{t-1} - x_{t-1}\right) - \gamma\,(K - 1)\, x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (28)$$

Esta ecuación. muestra que el coeficiente de ajuste al equilibrio es el mismo tanto en el caso de homogeneidad o de K distinto de uno.

ii) El análisis anterior ha supuesto la validez de un modelo condicional de y_t dada x_t, es decir, la exogeneidad débil de los regresores para los parámetros de nuestro interés, por lo que si este supuesto se quiere evaluar, lo más conveniente es la metodología de sistemas de vectores cointegrados propuesta por Johansen (1992). Con este tipo de análisis podemos obtener las posibles relaciones de largo plazo en un contexto multiecuacional y dado ellas, evaluar el supuesto de exogeneidad débil a través de la nulidad de los coeficientes de ajuste en las ecuaciones de las que asumimos "exógenas".

iii) Finalmente, y con relación a la metodología general a particular, la utilización de distribuciones estándares no implica necesariamente trabajar con el tamaño usual de zonas críticas (α = 0,05) cuando el modelo resulta de un proceso de selección en varias etapas (*repeated testing*). En dicho caso, la probabilidad de no rechazar en *n* pasos es:

$$p_{\alpha,n} = (1-\alpha)^n$$

Por lo cual en 40 veces (n = 40) para el valor usual de α = 0,05 esta probabilidad resulta 0,13 y la probabilidad de retener una variable no significativa 87%, la cual representa un error de tipo I extremadamente grande. El valor esperado del número de variables irrelevantes retenidas es ($n.\alpha$) es 2. Sin embargo, sólo cambiando a α =0,01, la probabilidad pasa de 0,13 a 0,67 y el valor esperado del número de variables retenidas no alcanza a uno (0,4), (ver Hendry y Krolzig, 2001).

IV. Conclusiones

La econometría de series temporales ha debido convivir y adaptarse a la caracterización como variables integradas de muchas series económicas frecuentemente estudiadas.

Si bien la posibilidad de que las distribuciones estándares no sean apropiadas para realizar las pruebas de hipótesis usuales constituye una preocupación legítima para el investigador, estas notas han tratado de discutir intuitivamente y a través de ejemplos las alternativas para poder utilizarlas.

Mientras que en un modelo de regresión con variables integradas, éstas puedan expresarse como variables $I(0)$, ya sea por diferenciación o como combinación lineal de otras por cointegración, se podrán usar distribuciones estándares (siguiendo los desarrollos analíticos de SWS). Un punto central es que para estos resultados sólo interesa la existencia de transformaciones potenciales y no la realización efectiva de la misma. De este modo, este análisis es válido aún en modelos expresados en los niveles de las variables integradas y en las relaciones dinámicas (inclusión de rezagos apropiados) en las que será más probable la presencia de las mencionadas transformaciones.

De esta forma la naturaleza integrada de las variables económicas parece poder ser respetada, otras formas de no estacionariedad como es el caso de los cambios estructurales, por sí solos e interactuando con el de integración aparecen como los nuevos desafíos para la práctica econométrica.

Referencias

- **Banerjee A., J. Dolado, J. Galbraith y D. Hendry (1993)**; *Cointegration, Error Correction and the Econometric Analysis of Non Stationary Data,* Oxford University Press.

- **Campos J., N. Ericsson y DF Hendry Eds. (2005)**; "General- to-Specific Modelling"*, The International Library of Critical Writings in Econometrics*, Elgar Publishing Ltd., UK.

- **Clements M.P. y D.F. Hendry (1999)**; *Forecasting Non-stationary Economic Time Series*, Cambridge, Mass. MIT Press.

- **Davidson, J.E.H., Hendry, D.F., Srba, F. y Yeo, J.S. (1978)**; "Econometric modelling of the aggregate time series relationship between consumers' expenditure and income in the United Kingdom", *Economic Journal*, 88, pp. 661-692. Reprinted in Hendry, D.F., *Econometrics: Alchemy or Science?* (1993).

- **Doornik J. y D.F. Hendry (2001)**; *Empirical Econometric Modelling Using PCGIVE*, Timberlake Consultants Ltd.

- **Engle R. y C.W. Granger (1987)**; "Cointegration and Error Correction: estimation and testing Representation", *Econometrica*, 55 , pp. 251-276.

- **Granger C. W. (1990)**; *General Introduction in Modelling Economic Time Series Advanced Texts in Econometrics*, Oxford University Press.

- **Granger y Newbold (1974)**; "Spurious regressions in econometrics", *Journal of Econometrics*, 2, pp. 111-120.

- **Harvey A.C. (1990)**; *The Econometric Analysis of Time Series*, 2nd edition, Phillip Allan.

- **Hendry D.F. (1995)**; *Dynamic Econometrics*, Advanced Texts in Econometrics, Oxford University Press.

- **Hendry D.F. y Krolzig (2001)**; *Automatic Econometric Model Selection using PcGets*, Timberlake Consultants Ltd.

- **Johansen S. (1992)**; “Cointegration in Partial Systems and the Efficiency of Single-Equation Analysis”, *Journal of Econometrics*, 52, 3, pp. 389-402.

- **Sargan J.D. (1964)**; “Wages and Prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology”, in Hart P., Mills G. and Whitaker J. (eds) *Econometric Analysis for National Economic Planning*, 16, pp. 25-63, London.

- **Sims C., Stock J. y Watson M. (1990)**; “Inference in Linear Time Series Models with some Unit Roots”, *Econometrica*, vol. 58, January, pp. 113-144.

- **Yule G. (1926)**; “Why do we sometimes get non-sense correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time series”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 89, pp. 1-64.